- Campo complesso $\mathbb{C}$

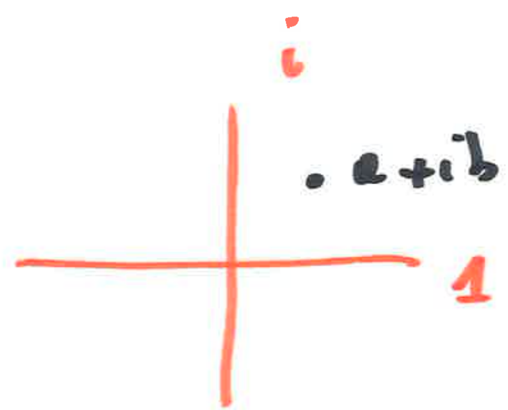
→ Teorema fondamentale dell'algebra

$$\forall \ p(x) \in \mathbb{C}[x] \quad \exists \ \alpha_1 \dots \alpha_n, \ \beta \in \mathbb{C}:$$

$$p(x) = \beta (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

$\deg p(x) = n$

$z \in \mathbb{C}$ $\quad z = a+ib$



Famiglia di matrici diagonalizzabili:

1) far vedere che $\forall$ gli autovalori $\in \mathbb{K}$

2) calcolare le molt. geometriche e far vedere che V_n è somma diretta degli autospazi.

Teorema spettrale: Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice di ordine n reale e simmetrica ${}^tA = A$. Allora <u>tutti</u> gli autovalori di A sono reali.

DIM: Sia $p(x) = \det(A - \lambda I)$ il polinomio caratteristico di $A \Rightarrow \deg p(x) = n$.

Se consideriamo $p(x) \in \mathbb{C}[x] \Rightarrow$ siamo sicuri che in $\mathbb{C}$ $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ tale che $p(\lambda) = 0$.

Sia dunque $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A)$ ed osserviamo che (con le debite molteplicità) $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A)$ contiene n autovalori $\to$ mostriamo che deve essere $\lambda \in \mathbb{R}$. (cioé $\lambda = \bar{\lambda}$)

$\lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(A) \Rightarrow \exists \underset{X \neq \underline{0}}{X \in \mathbb{C}^n}$ autovettore di autovalore λ

$\Rightarrow AX = \lambda X$ ma coniugando tutto abbiamo anche

$\overline{AX} = \bar{\lambda}\bar{X}$

$\| $

$A\bar{X}$ perché A matrice reale e quindi $A = \bar{A}$

CALCOLO

$\lambda\, {}^T X \cdot \bar{X} = {}^T(\lambda X)\bar{X} = {}^T(AX)\bar{X} = {}^T X({}^T A\bar{X}) = {}^T X(A\bar{X}) =$

$= {}^T X(\bar{\lambda}\bar{X}) = \bar{\lambda}\,{}^T X\bar{X}$

perché $A = {}^T A$

$(\lambda - \bar{\lambda})\,{}^T X \cdot \bar{X} = 0$ ma ${}^T X = (x_1 \dots x_n) \neq \underline{0}$

e ${}^T X \bar{X} = x_1\bar{x}_1 + \dots + x_n\bar{x}_n > 0$

perché $x_i\bar{x}_i \geq 0$ e $x_i\bar{x}_i = 0 \iff x_i = 0$.

$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ $\square$

$$A = {}^{T}\!A \Rightarrow \boxed{\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A)} m_a(\lambda) = n}$$
$A \in \mathbb{R}^{n,n}$

Teorema della base spettrale.

→ Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Allora la matrice A è ortogonalmente diagonalizzabile se e solamente se $A = {}^{T}\!A$.

ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILE SIGNIFICA CHE $\exists\, P \in GL(n, \mathbb{R})$ con $P^{-1} = {}^{T}\!P$ tale che $\boxed{P^{-1} A P = D}$ con D matrice diagonale.

→ le righe e le colonne di P sono un sistema di vettori ORTONORMALE.

__DIM:__ ($\Rightarrow$) IP: A ortogonalmente diag.

Ts: $A = {}^tA$

__IP__ $P^{-1} = {}^tP$ e $P^{-1}AP = D \Rightarrow$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = {}^tPAP = D$$

$$= {}^t({}^tPAP) = {}^tD = D$$

$$= {}^tP\,{}^tA\,P = P^{-1}\,{}^tA\,P$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = P^{-1}\,{}^tA\,P \Rightarrow A = {}^tA \quad \#$$

($\Leftarrow$) IP: $A = {}^tA$

Ts: $\exists P$ con $P^{-1} = {}^tP$ e $P^{-1}AP = D$.

__DIM:__ per induzione su n = ordine di A.

- $n = 1$: $A = (a_{11})$ $A = {}^tA$ ed è ort. diag. con la matrice $P = (1)$.

• $(n-1) \Rightarrow n$

Sia A la nostra matrice.

Per il teorema spettrale $\exists \lambda \in Spec_{\mathbb{R}}(A)$ e sia X un autovettore <u>reale</u> corrispondente a λ $\Rightarrow$ $AX = \lambda X$. Possiamo supporre $\|X\| = 1$.

COMPLETIAMO (X) a base ~~ortogonale~~ di $\mathbb{R}^n$ ortonormale

$$\mathcal{B} = (X, y_2, y_3 \dots y_n)$$

con $X \cdot y_i = 0$ e $y_i \cdot y_j = 0$ $\forall i \neq j$

e ~~allora~~ scriviamo i vettori di $\mathcal{B}$ in colonna in una matrice P_0.

calcoliamo

$$P_0^{-1} A P_0 = {}^T P_0 A P_0 = {}^T P_0 (AX \; Ay_2 \dots Ay_n)$$

$$= \begin{pmatrix} {}^T X \\ {}^T y_2 \\ \vdots \\ {}^T y_n \end{pmatrix} (AX \; Ay_2 \dots Ay_n) =$$

$AX = \lambda X$

$$= \begin{bmatrix} {}^T XAX & {}^T XAy_2 & \dots & {}^T XAy_n \\ {}^T y_2 AX & {}^T y_2 A y_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ {}^T y_n AX & \dots & \dots & {}^T y_n A y_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda\, {}^T X X & \lambda\, {}^T X y_2 & \cdots & \lambda\, {}^T X y_n \\ \lambda\, {}^T y_2 X & & & \\ \vdots & & Q & \\ \lambda\, {}^T y_n X & & & \end{bmatrix} =$$

$$\uparrow$$

$AX = \lambda X$

$${}^T X A = {}^T X\, {}^T A =$$
$$= {}^T (AX) =$$
$$= \lambda\, {}^T X$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \; 0 \; \cdots \; 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{Q}_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Usiamo ora l'ipotesi induttiva.

1) $Q = {}^T Q$ infatti l'entrata in pos. (i,j) di ${}^T P_0 A P$ $i,j \geq 2$

é ${}^T y_i A y_j =$

$= {}^T({}^T y_i A y_j) =$

$= ({}^T y_j {}^T A y_i) =$

$= ({}^T y_j A y_i)$

entrata in pos. (j, i).

$\Rightarrow$ 2) $\exists$ matrice P_1' ortogonale tale che ${}^T P_1' Q P_1' = D_1'$ in quanto Q ha ordine $(n-1)$.

P_1' è una matrice di ordine $(n-1) \times (n-1)$.

$$\left[\begin{array}{l} {}^T P_1' Q P_1' = D_1' \\ {}^T P_1' = P_1'^{-1} \end{array}\right.$$

PONIAMO $P_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_1' & \\ 0 & & & \end{array}\right]$

vediamo che 1) $${}^TP_1 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & {}^TP_1' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & P_1'^{-1} \end{array}\right] = P_1^{-1}$$

2) $${}^TP_1({}^TP_0 A P_0)P_1 =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & {}^TP_1' \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda & \\ \hline & Q \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & P_1' \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \lambda & \\ \hline & {}^TP_1' Q P_1' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & \\ \hline & D_1' \end{array}\right]$$

matrice diagonale!!

$${}^TP_1({}^TP_0 A P_0)P_1 = ({}^TP_1 {}^TP_0) A (P_0 P_1) = {}^T\underbrace{(P_0 P_1)}_{{}^TP_2} A \underbrace{(P_0 P_1)}_{P_2}$$

$P_2 = P_0 P_1$ ed osserviamo che ${}^{T}P_2 \, P_2 = {}^{T}(P_0 P_1)(P_0 P_1)$

$$= {}^{T}P_1 \, {}^{T}P_0 \, P_0 \, P_1 = {}^{T}P_1 P_1 = I$$

quindi $\left[\begin{array}{c|c} \lambda & \\ \hline & D_1' \end{array}\right] = P_2^{-1} A P_2$

→ NE SEGUE CHE A è diagonalizzabile con P_2

P_2 è ortogonale. $\square$

<u>CONSEGUENZA</u>: Quando si mette un prod. scalare reale in forma diagonale prendendo come base una base ortogonale rispetto ad esso, le entrate sulla diag sono tutte gli autovalori relativi la

base data.

→ per un prodotto scalare, si possono anche dividere i vettori della base di norma $\neq 0$ per la loro norma. → in questo caso si ottiene che la matrice del prodotto associata è diagonale e contiene solo <u>+1, −1, 0</u> come possibili entrate.

I prodotti scalari reali sono classificati dalla loro <u>SEGNATURA</u> cioè

$\#\ +1$
$\#\ 0$ che compaiono
$\#\ -1$

nella matrice normalizzata, ovvero

$S_+ = \# \lambda \in \mathrm{Spec}(M) : \lambda > 0$

$S_0 = \# \lambda \in \mathrm{Spec}(M) : \lambda = 0$

$S_- = \# \lambda \in \mathrm{Spec}(M) : \lambda < 0.$

$\boxed{\alpha X Y = X \alpha Y}$ se $\alpha \in \mathbb{R}$

$X(\alpha Y) =$

$= X(\alpha I) Y = (\alpha I) X Y =$

$= (\alpha X) Y = \alpha (X Y).$

In generale gli scalari commutano col prodotto di matrici.

N.B.

posto

centro. $Z(GL(n, \mathbb{K})) :=$

$\{M \in GL(n,\mathbb{K}) : \forall N \in GL(n,\mathbb{K})\ MN = NM\}$

si ha

$Z(GL(n,\mathbb{K})) = \{\alpha I : \alpha \in \mathbb{K}\}.$

queste matrici commutano con tutte le altre.

⚠ Quando si diagonalizza gli autovettori nella matrice diagonalizzante e gli autovalori nella matrice diagonale devono essere messi nello stesso ordine!

1) si trovano gli autovalori e li si mette in D
2) si trovano le basi degli autospazi.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{x_1 \; x_2}_{\in V_{\lambda_1}} \quad y_1 \in V_{\lambda_2} \quad z_1 \in V_{\lambda_3}$$

$$P^{-1} A P = D$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_2 \end{bmatrix}$$

Geometria analitica / euclidea / proiettiva

→ APPLICAZIONE DELL'ALGEBRA (LINEARE).
INTERPRETAZIONE

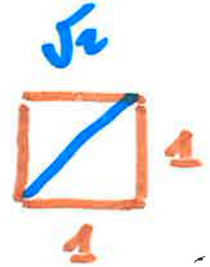
$\mathbb{K}$ $\mathbb{R}$

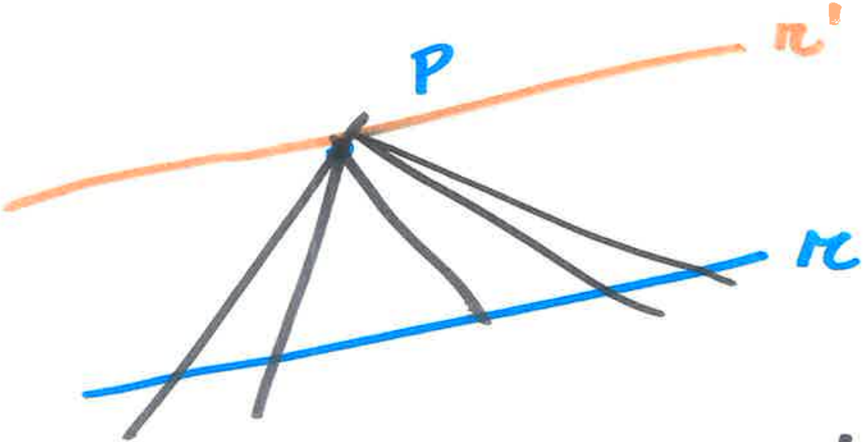
Geometria analitica + DISTANZA EUCLIDEA FRA PUNTI

↓

geometria punti/rette piani euclidei

GEOMETRIA EUCLIDEA





geometria proiettiva

estende la geometria affine (ed anche euclidea) aggiungendo dei "punti all'infinito".

→ direzioni delle rette.

→ in geometria proiettiva i sottospazi sono sott. vettoriali.

→ in generale l'ambiente proiettivo è quello in cui è più semplice lavorare con sottospazi ma la teoria delle curve/varietà algebriche ha problemi.

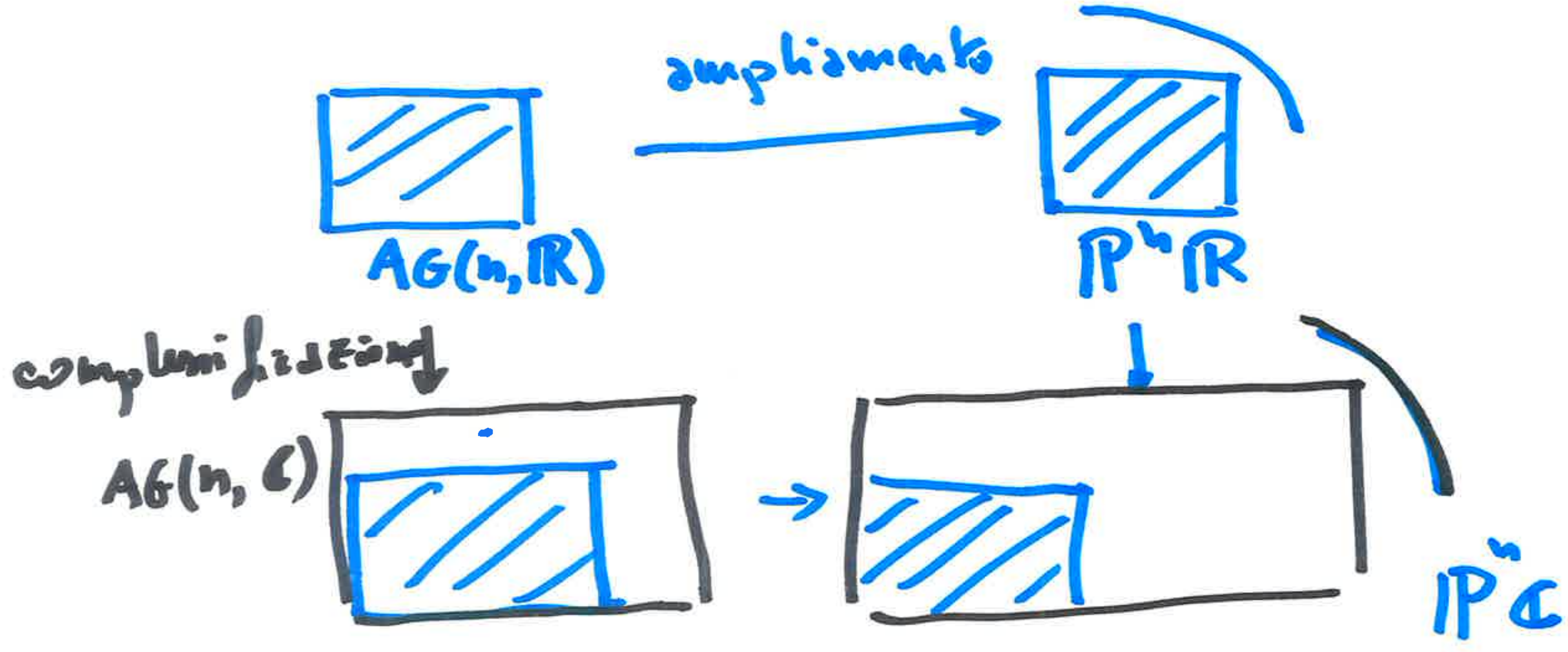
$x^2+y^2+1=0$

$x^2+y^2=0$ $\quad (0,0)$

$(x^4+y^2)^2+7=0$

$x^6+y^4=0$

→ COMPLESSIFICAZIONE (LAVORARE SU $\mathbb{C}$)



GEOMETRIA AFFINE.

STRUTTURA ALGEBRICA

$(A, V(\mathbb{K}), f)$

$A \neq \emptyset$ insieme

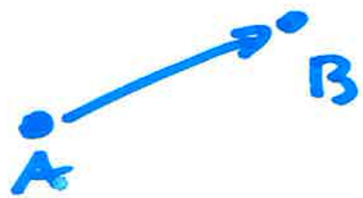
$V(\mathbb{K})$ sp. vett. su $\mathbb{K}$

$f: A \times A \to V(\mathbb{K})$

A = insieme dei punti

$V(\mathbb{K})$ = spazio di traslazione

f funzione che dati 2 punti fornisce un vettore



f deve soddisfare le seguenti 2 proprietà:

1) $\forall P \in A \ \forall \bar{v} \in V(\mathbb{K}) \ \exists!\, Q \in A$ tale che

$$f(P,Q) = \bar{v}$$

$\overrightarrow{PQ} := f(P,Q)$ e per convenzione scrivo anche

$$\boxed{Q = P + \bar{v}}$$

ATTENZIONE

$+ : A \times V \to A$

non è una "somma" in senso stretto.

Q è detto <u>traslato</u> di P secondo il vettore $\bar{v}$

2) $\forall P, Q, R \in A$: $\quad \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

somma di vettori.

Lemma:

1) $\overrightarrow{PQ} = \underline{0} \iff Q = P$

2) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

3) Siano $\bar{v}, \bar{w} \in V(\mathbb{K}) \Rightarrow \underbrace{(P+\bar{v})}_{\text{traslato}}+\bar{w} =$

$= \underbrace{P+(\underbrace{\bar{v}+\bar{w}}_{\text{somma di vettori}})}_{\text{traslato}}.$

4) $\exists$ una corrispondenza biunivoca fra i punti ($=$ el. di A) ed i vettori di $V(\mathbb{K})$.

<u>DIM:</u>

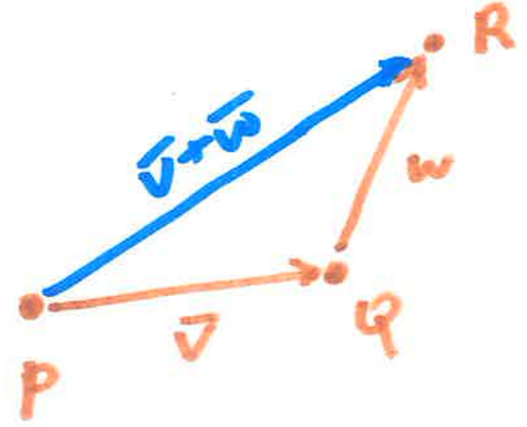
1) $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$ per (2) di f.

$\Rightarrow$ sottraendo a dx e sx $\overrightarrow{PP} \Rightarrow \overrightarrow{PP} = \underline{0}$

poiché se $\overrightarrow{PQ} = \underline{0} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP} \Rightarrow$ per (1) di f $Q = P$.

2) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \underline{0} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

3)



$P+\bar{v} = Q \Rightarrow \bar{v} = \overrightarrow{PQ}$

$Q+\bar{w} = R \Rightarrow \bar{w} = \overrightarrow{QR}$

$\Rightarrow P+(\bar{v}+\bar{w}) = P+(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR})$

$= P+(\overrightarrow{PR}) = R$

4) Sia P un qualsiasi punto fissato e $Q \in A$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in V_n(\mathbb{K})$ quindi la funzione

$\varphi_P : Q \to \overrightarrow{PQ}$ è ben definita.

Inoltre a) essa è iniettiva perché

se fosse $\varphi_P(Q) = \varphi_P(R) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} \Rightarrow$

$P+\overrightarrow{PQ} = P+\overrightarrow{PR} \Rightarrow Q = R$

b) è suriettiva perché $\forall \bar{v} \in V(\mathbb{K})\ \exists Q \in A : \overrightarrow{PQ} = \bar{v}$

e dunque $\varphi_P(Q) = \bar{v}$ $\square$

Def: Sia $(A, V_n(\mathbb{K}), f)$ uno spazio affine. Σ

Diciamo $\dim \Sigma := \dim V_n(\mathbb{K})$.

DIMENSIONE (AFFINE).

$\dim \Sigma = 0$	$\Sigma = \{P\}$	PUNTO
$\dim \Sigma = 1$		RETTA
$\dim \Sigma = 2$		PIANO
$\dim \Sigma = 3$		SOLIDO

Def: $\Pi \subseteq A$ é un sottospazio affine di Σ se $\exists\, W \leq V_n(\mathbb{K})$ tale che $(\Pi; W; f^{W}_{\Pi \times \Pi})$ è uno spazio affine. Si dice $\dim \Pi := \dim W$.

Def: $\overline{\Pi} \subseteq A$ è detto <u>sottospazio lineare</u> di spazio di traslazione W e origine P

$\overline{\Pi} := [P; W]$

se esso è l'insieme di tutti i traslati di P secondo vettori di $W \leq V_n(\mathbb{K})$.

$$[P; W] := \{ P + \overline{w} \mid \overline{w} \in W \}$$

<u>**Teorema:**</u> I sottospazi lineari di $\Sigma = (A, V, f)$ sono tutti e soli i sottospazi affini.

<u>DIM:</u> Sia $\Pi = (\Pi, W, f^{W}_{|\Pi \times \Pi})$ un sott. affine di $\Sigma \Rightarrow \exists P \in \Pi$ e $\forall \overline{w} \in W$, $P + \overline{w} \in \Pi$

$\Rightarrow [P;W] \subseteq \Pi$

d'altro canto se $Q \in \Pi \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in W \Rightarrow$

$\Rightarrow Q \in [P;W] \Rightarrow \Pi \subseteq [P;W]$

ed in particolare Π è un sottospazio lineare.

Viceversa: sia $\overline{\Pi}$ un sottospazio lineare

$\Rightarrow \overline{\Pi} = [P;W]$ per qualche $P \in \overline{\Pi}$

e $W \leq V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow$

$(\overline{\Pi}, W, f^{|W}_{|\overline{\Pi}\times\overline{\Pi}})$ è un sottospazio

affine, infatti $\forall R, S \in \overline{\Pi}$ si ha $\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS} \in W$

$\Rightarrow \overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PS} \in W \Rightarrow \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{RS} \in W$

$\Rightarrow f_1^{r}$ è ben definita e $[P;W]$ è un sottospazio affine. $\square$

proposizione: Sia $\Pi = [P;W]$ un sottospazio (lineare)

$\Rightarrow \forall Q \in \Pi : [P;W] = [Q;W]$.

DIM: Sia $R \in [Q;W] \Rightarrow \overrightarrow{QR} \in W$

d'altro canto $\overrightarrow{PQ} \in W$ perché $Q \in \Pi$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} \in W \Rightarrow R \in [P;W]$.

$\Rightarrow [Q;W] \subseteq [P;W]$.

Viceversa: sia $R \in [P;W] \Rightarrow \overrightarrow{PR} \in W$ e $\overrightarrow{PQ} \in W$

$\Rightarrow \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} \in W \Rightarrow \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QR} \in W \Rightarrow$

$\Rightarrow R \in [Q;W] \Rightarrow [P;W] \subseteq [Q;W]$. $\square$

OSS: Siano Π e Λ due sottospazi

$$\Pi = [P; W]$$
$$\Lambda = [Q; U]$$

$\Rightarrow$ o $\Pi \cap \Lambda = \emptyset$ oppure $\Pi \cap \Lambda = [R; W \cap U]$

con R un qualsiasi punto di $\Pi \cap \Lambda$.

DIM: Se $\Pi \cap \Lambda \neq \emptyset$ sia $R \in \Pi \cap \Lambda$

ora $\forall \bar{u} \in W \cap U$, $R + \underbrace{\bar{u}}_{\in W} \in \Pi$ e $R + \underbrace{u}_{\in V} \in \Lambda \Rightarrow$

$$\Rightarrow R + \bar{u} \in \Pi \cap \Lambda$$

Viceversa se $X \in \Pi \cap \Lambda \Rightarrow \overrightarrow{RX} \in U, \overrightarrow{RX} \in W \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{RX} \in W \cap U \Rightarrow X \in [R; W \cap U]$ $\square$

Def: Due sottospazi Π e Λ sono detti **paralleli** se $\Pi = [P; W]$ $\Lambda = [Q; \mathcal{U}]$ e vale $\mathcal{U} \subseteq W$ oppure $W \subseteq \mathcal{U}$.

$$\Pi // \Lambda$$

oss: Se $\mathcal{U} \subseteq W$ e $\Pi // \Lambda$ con $\Pi \cap \Lambda \neq \emptyset \Rightarrow \Lambda \subseteq \Pi$
$W \subseteq \mathcal{U}$ e $\Pi // \Lambda$ con $\Pi \cap \Lambda \neq \emptyset \Rightarrow \Pi \subseteq \Lambda$

In particolare se $\dim \mathcal{U} = \dim W$ e $\Pi // \Lambda$ ci sono 2 possibilità:

1) $\Pi \cap \Lambda = \emptyset$
2) $\Pi = \Lambda$

Def: ~~[illegible]~~ Un sottospazio affine di $\dim = n-1$ in uno spazio di $\dim = n$ è detto **iperpiano**

Def.: Sia $\Sigma = (A, V, f)$ uno spazio affine.
Si dice **riferimento affine** $\Gamma = (O, \mathcal{B})$ una coppia in cui O è un punto di Σ detto **origine del riferimento** e $\mathcal{B}$ è una **base** di $V(\mathbb{K})$.

Si dice coordinatizzazione rispetto Γ la funzione

$$\Phi_\Gamma : A \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

che associa ad ogni punto $P \in \Sigma$ le componenti del vettore $\vec{OP}$ rispetto la base $\mathcal{B}$.

$$\Phi_p(P) = (p_1 \dots p_n) \in \mathbb{K}^n$$

ove $\vec{OP} = p_1\bar{e}_1 + \dots + p_n\bar{e}_n$

se $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ #

GEOMETRIA AFFINE $AG(n, \mathbb{K})$ $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$

$\ulcorner$ $A = (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, f)$ $\qquad f(P,Q) = Q - P$ $\perp$