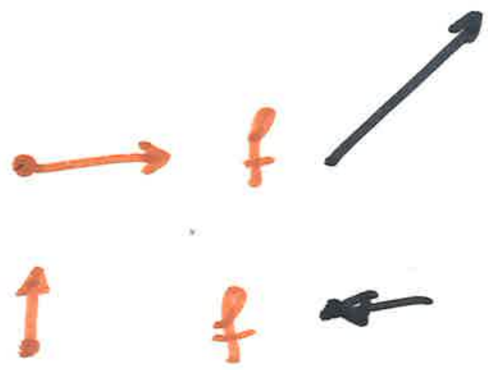
DIAGONALIZZAZIONE DI MATRICI (DI APPLICAZIONI LINEARI ENDOMORFISMI).

$f: V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow V_n(\mathbb{K})$

$f(\bar{v}) = \alpha\bar{v} + \bar{w}$



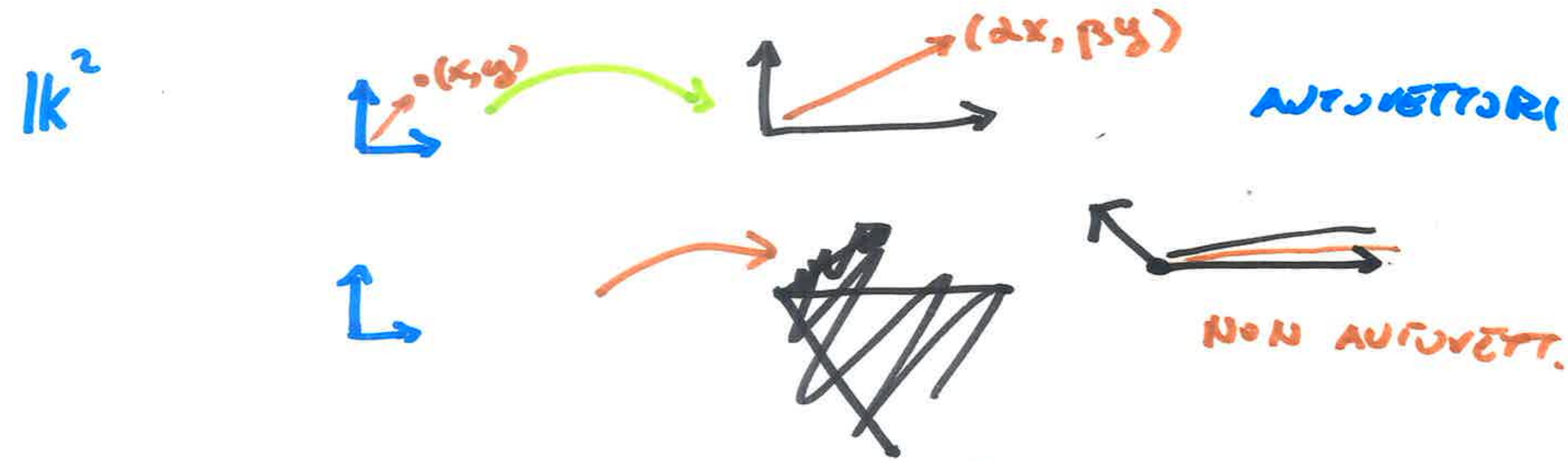
CASO PARTICOLARE $\exists \bar{v} \neq \underline{0}: \; f(\bar{v}) = \alpha\bar{v}$

Il vettore $\bar{v}$ è mandato in un vettore ad esso proporzionale.

__Def:__ Un vettore $\bar{v} \neq \underline{0}$ è detto <u>autovettore</u> per $f: V_n(\mathbb{K}) \to V_n(\mathbb{K})$ se $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tale che $f(\bar{v}) = \alpha\bar{v}$.

Def Sia adesso $M \in \mathbb{K}^{n,n}$. Si dice autovettore per M un vettore $X \neq \underline{0}$, $X \in \mathbb{K}^{n,1}$ tale che $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ con

$$MX = \lambda X.$$



Def: Sia $M \in \mathbb{K}^{n,n}$. Si dice autovalore di M ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $\exists X \in \mathbb{K}^{n,1}$ con $MX = \lambda X$, $X \neq \underline{0}$.

L'insieme di tutti gli autovalori di una matrice M è detto spettro di M e si indica con $\mathrm{Spec}(M)$

$$\mathrm{Spec}(M) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \exists X \in \mathbb{K}^{n,1} \setminus \{\underline{0}\} : MX = \lambda X\}.$$

$$\parallel$$

$$\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(M)$$

<u>problema</u>: trovare autovalori e autovettori di M.

1 → cerchiamo gli autovalori di M

2 → $\forall \bar{\lambda} \in \mathrm{Spec}(M)$ cerchiamo i corrispondenti autovettori.

λ è autovalore di $M \iff \exists \bar{X} \neq \underline{0}$ soluzione di

$$MX = \lambda X$$

$\iff \exists \bar{X}$ soluzione di

$$MX = \lambda I X$$

$$(M - \lambda I)X = \underline{0}$$

con $\bar{X} \neq \underline{0}$

osserviamo che $(M-\lambda I)X=\underline{0}$ è un sistema lineare omogeneo in X; esso ammette soluzioni non banali $\iff$ non è di Cramer (i.e. ammette più di 1 soluzione) $\iff$ $\det(M-\lambda I)=0$.

<u>Def</u>: Data $M \in \mathbb{K}^{n,n}$ si dice polinomio caratteristico di M il polinomio $\boxed{p_M(x) := \det(M - xI).}$
e si dice equazione caratteristica di M l'equazione $\boxed{\det(M-\lambda I)=0.}$

→ GLI <u>AUTOVALORI</u> DI M sono le radici dell'equazione caratteristica.

$$\mathrm{Spec}(M) = \{\lambda : \det(M-\lambda I)=0\}.$$

valori per cui la matrice $M-\lambda I$ non è invertibile.

→ DATO $\bar{\lambda} \in Spec(M)$ per cercare gli autovettori dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$(M-\bar{\lambda} I)X=\underline{0}.$$

In particolare chiamiamo

$$V_{\bar{\lambda}} := \{X \mid (M-\bar{\lambda} I)X=\underline{0}\}.$$

Autospazio di autovalore $\bar{\lambda}$.

⚠ GLI AUTOVETTORI DI AUTOVALORE $\bar{\lambda}$ SONO TUTTI E SOLI I VETTORI NON-NULLI DI $V_{\bar{\lambda}}$.

Sia $M \in \mathbb{K}^{n,n}$ e $\lambda \in \mathrm{Spec}(M)$.

- Si dice <u>molteplicità algebrica</u> di λ il valore a_λ che corrisponde a quante volte λ è radice dell'eq. caratteristica di M.

$$p_M(x) = \det(M - \lambda I) = (x-\lambda)^{a_\lambda} q(x)$$

e $(x-\lambda)$ non divide $q(x)$, cioè $q(\lambda) \neq 0$.

- Si dice <u>molteplicità geometrica</u> di λ il valore

$$g_\lambda := \dim V_\lambda$$

<u>OSS:</u> $\lambda \in \mathrm{Spec}(M) \Rightarrow a_\lambda \geq 1$ e $g_\lambda \geq 1$

$\deg p_M(x) \leq n \Rightarrow a_\lambda \leq n$ $\qquad 1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda \leq n$

$\dim V_\lambda \leq \dim \mathbb{K}^n \Rightarrow g_\lambda \leq n$!

DIAGONALIZZAZIONE.

$f: V_n \to V_n$ lineare

vogliamo trovare una base rispetto cui la matrice di f sia la più semplice possibile.

$$\rightarrow D = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

può esserci una base rispetto cui f è diagonale o non esistere.

Supponiamo che $\exists$ una base $\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$ di f rispetto cui la matrice di f è diagonale $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{aligned} f(\bar{e}_1') &= a_{11}\bar{e}_1' \\ f(\bar{e}_2') &= \quad a_{22}\bar{e}_2' \\ &\vdots \quad \ddots \\ f(\bar{e}_n') &= \qquad a_{nn}\bar{e}_n' \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{B}'$ è una base formata da autovettori per f.

Viceversa, se $\mathcal{B}'$ è una base di autovettori per f

$\Rightarrow$ la matrice di f rispetto $\mathcal{B}'$ è diagonale.

f è detta diagonalizzabile sse $\exists$ una base di autovettori per f in $V_n(\mathbb{K})$.

$\rightarrow$ vogliamo fare i conti con le matrici.

<u>Def</u>: Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$. Si dice che A e B sono <u>simili</u> se $\exists\, P \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che $\boxed{A = P^{-1} B P.}$

<u>OSS</u>: Due matrici simili rappresentano la stessa applicazione lineare f a meno di un cambiamento di base.

→ f è diagonalizzabile (come app. lineare) se chiamata A una sua qualsiasi matrice rappresentativa rispetto una base $\mathcal{B}$ di $V_n(\mathbb{K})$ esiste una matrice D diagonale simile ad A.

Def: Una matrice A è detta <u>diagonalizzabile</u> se essa è simile ad una matrice diagonale

$\Rightarrow$ esiste D diagonale e $P \in GL(n, \mathbb{K})$

tale che $\boxed{D = P^{-1}AP}$

ovvero $PD = AP$.

OSS: 1) La relazione di similitudine per le matrici è una relazione di equivalenza

$A = I^{-1}AI = A$ riflessiva

$A = P^{-1}BP \Rightarrow B = PAP^{-1} = Q^{-1}AQ \quad Q = P^{-1}$ simm.

$A = P^{-1}BP, \ B = Q^{-1}CQ \Rightarrow A = P^{-1}Q^{-1}CQP = R^{-1}CR$ con $R = QP$

transitiva.

2) Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratt, determinante e rango.

$$p_A(x) = \det(A - xI) = \det(P^{-1}BP - xI) =$$

$$= \det(P^{-1}BP - xP^{-1}P) = \det[P^{-1}(B - xI)P] =$$

$$= (\det P^{-1})(\det(B - xI))(\det P) =$$

$$= \det(B - xI) = p_B(x)$$

$\boxed{A = P^{-1}BP}$ $\Rightarrow$ $p_A(0) = \det A = p_B(0) = \det(B)$

$\Rightarrow$ A e B hanno gli stessi autovalori

- A e B hanno lo stesso rango perché rappr. la stessa funzione f.

$\rightarrow$ A e B simili $\Rightarrow \forall \lambda \in Spec(A) = Spec(B)$ $g_\lambda(A) = g_\lambda(B)$.

$\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(B)$

$$\mathrm{rk}(A - \lambda I) = \mathrm{rk}(P^{-1}BP - \lambda P^{-1}P) =$$
$$= \mathrm{rk}[P^{-1}(B - \lambda I)P] =$$

ma P invertibile $\Rightarrow$ moltiplicare per P o P^{-1} a dx o sx non cambia i ranghi (= dim. immagine) $\Rightarrow$

$$= \mathrm{rk}(B - \lambda I). \qquad \square$$

1) Una matrice A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}^n$ ammette una base di autovettori per A

→ Supponiamo che $\mathbb{K}^n$ ammetta una base $c_1 \dots c_n$ di autovettori per A $\Rightarrow$ posto $P = [c_1 \dots c_n]$

$$AP = [Ac_1 \dots Ac_n] =$$
$$= [\lambda_1 c_1 \dots \lambda_n c_n] = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = PD$$

$\Rightarrow$ A diagonalizzabile.

viceversa A diagonalizzabile $\Rightarrow \exists P$ invertibile tale che $AP = PD$ con D diagonale $\Rightarrow$ le colonne di P sono una base di $\mathbb{K}^n$ di autovettori per A.

#

2) se vogliamo trovare una base di autovettori per A dobbiamo cercare questi autovettori negli autospazi di A.

Teorema: Siano $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2} \dots V_{\lambda_t}$ autospazi di A $\Rightarrow V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots V_{\lambda_t}$; cioè gli autospazi di A sono in somma diretta.

CONSEGUENZA: A diag. $\Leftrightarrow \mathbb{K}^n = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}$ con $\{\lambda_1, \dots \lambda_t\} = \operatorname{Spec}(A)$. $\Leftrightarrow \boxed{\sum_{\lambda \in \operatorname{Spec}(A)} g_\lambda = n}$

RICHIAMO: Si dice che t sottospazi $U_1, U_2 \dots U_t$ sono in somma diretta se ogni vettore di $U_1 + U_2 + \dots + U_t$ si scrive in modo unico come somma di vettori degli U_i.

$\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_t \iff$

$\forall \bar{v} \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \dots + \mathcal{U}_t$

$\exists! \, (\bar{u}_1, \bar{u}_2 \dots \bar{u}_t) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \dots \times \mathcal{U}_t$

tale che $\bar{v} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \dots + \bar{u}_t$

Se $t = 2 \Rightarrow \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \iff \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{\underline{0}\}$.

Se $t > 2 \Rightarrow \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_t \Rightarrow \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \{\underline{0}\}$ $i \neq j$

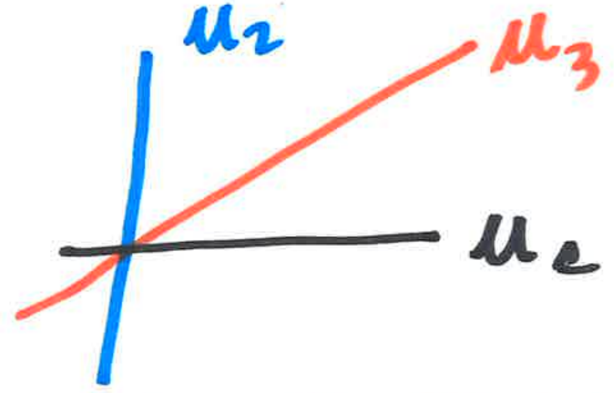
ma non viceversa!

$\mathbb{R}^2$

$\mathcal{U}_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{U}_2 = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

$\mathcal{U}_3 = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.



NON SONO IN SOMMA DIRETTA!

Se $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_t \Rightarrow \dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_t) =$

$= \dim U_1 + \dim U_2 + \dots + \dim U_t.$

l'unione di basi di sottospazi in somma diretta è una base della somma.

(esercizio).

<u>DIM</u> DEL TEOREMA CHE GLI AUTOSPAZI SONO IN SOMMA DIRETTA.

→ per induzione su t = numero di addendi:

• $t=2$: Supponiamo V_λ, V_μ due ~~sottosp~~ autospazi con $\lambda \neq \mu$ e $X \in V_\lambda \cap V_\mu \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{matrix} AX = \lambda X \\ AX = \mu X \end{matrix} \Rightarrow (\lambda - \mu) X = \underline{0} \Rightarrow X = \underline{0}$$

perché $\lambda \neq \mu \Rightarrow$

$\Rightarrow V_\lambda \oplus V_\mu$.

- $(t-1) \Rightarrow t$ [ogni somma di $(t-1)$ autospazi di A è diretta $\Rightarrow$ ogni somma di t autospazi è diretta]

$V_{\lambda_1}\ V_{\lambda_2} \dots V_{\lambda_t}$ $\quad t$ autospazi differenti

$$X \in V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_t} \Rightarrow$$

$$\boxed{X = X_1 + X_2 + \dots + X_t} \quad \text{con } X_i \in V_{\lambda_i}$$

se la somma $V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_t}$ non fosse diretta $\Rightarrow$

$$\boxed{X = X_1' + X_2' + \dots + X_t'} \quad \text{con } X_i' \in V_{\lambda_i}$$

e almeno un $X_j' \neq X_j$

$$AX = A(X_1 + X_2 + \dots + X_t) =$$
$$= AX_1 + AX_2 + \dots + AX_t =$$
$$= \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_t X_t =$$
$$= \lambda_1 X_1' + \lambda_2 X_2' + \dots + \lambda_t X_t'$$

$$\lambda_1 X = \lambda_1 X_1 + \lambda_1 X_2 + \dots + \lambda_1 X_t =$$
$$= \lambda_1 X_1' + \lambda_1 X_2' + \dots + \lambda_1 X_t'$$

$$AX - \lambda_1 X = (\lambda_2 - \lambda_1) X_2 + (\lambda_3 - \lambda_1) X_3 + \dots + (\lambda_t - \lambda_1) X_t$$
$$= (\lambda_2 - \lambda_1) X_2' + (\lambda_3 - \lambda_1) X_3' + \dots + (\lambda_t - \lambda_1) X_t'$$

$\in$

$V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}$

$t-1$ autospazi $\Rightarrow$ somma diretta $\Rightarrow$

$$
\left.\begin{aligned}
(\lambda_2-\lambda_1)X_2 &= (\lambda_2-\lambda_1)X_2' \\
(\lambda_3-\lambda_1)X_3 &= (\lambda_3-\lambda_1)X_3' \\
&\ \vdots \\
(\lambda_t-\lambda_1)X_t &= (\lambda_t-\lambda_1)X_t'
\end{aligned}\right] \Rightarrow \begin{aligned} X_2 &= X_2' \\ X_3 &= X_3' \\ &\ \vdots \\ X_t &= X_t' \end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X &= X_1 + (X_2 + X_3 + \dots + X_t) \\
&= X_1' + (X_2 + X_3 + \dots + X_t) \Rightarrow X_1 = X_1' \quad \lightning
\end{aligned}
$$

perché avevamo supposto che X si scrivesse in 2 modi differenti $\Rightarrow$ la somma di t autospazi distinti è diretta $\square$

Una matrice A è diagonalizzabile $\iff$

$$\sum_{\lambda \in Spec(A)} g_\lambda = n$$

$$\sum g_\lambda = n \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\lambda_i} = \mathbb{K}^n \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ unendo le basi degli autospazi si ottiene una base (perché sono in somma diretta) di $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori.

$\Rightarrow$ A è diag.

$$\sum g_\lambda \leq n$$

$\sum a_\lambda \leq n$ perché $\deg p_A(x) = n$

Teorema: $\forall \lambda \in Spec(A)$: $g_\lambda \leq a_\lambda$.

DIM: Supponiamo $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, $\lambda \in Spec(A)$

$g_\lambda = K \Rightarrow$ esiste una base di V_λ

formata da K vettori $\tilde{\mathcal{B}} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_K)$.

con il completamento della base completiamo

$\tilde{\mathcal{B}}$ ad una base di $\mathbb{K}^n$

$$\mathcal{B} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_K, \bar{w}_1 \dots \bar{w}_{n-K})$$

scriviamo questi vettori in colonna

e mettiamoli in una matrice P

$$AP = (A\bar{v}_1 \dots A\bar{v}_k \; A\bar{\omega}_1 \dots A\bar{\omega}_{n-k}) =$$

$$= (\lambda\bar{v}_1 \dots \lambda\bar{v}_k \; A\bar{\omega}_1 \dots A\bar{\omega}_{n-k}) =$$

$$= P \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & & & \\ & \ddots & & c_1 & \dots & c_{n-k} \\ & & \lambda & & & \\ \hline & 0 & & & & \end{array}\right]$$

$$P^{-1}AP = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{matrix} & E \\ \hline 0 & F \end{array}\right]}_{k \quad\quad n-k.} = G$$

$$P_A(x) = P_G(x) \qquad \det(G - xI) = \det \left[\begin{array}{c|c} \lambda I_k - xI_k & E \\ \hline 0 & F - xI \end{array}\right]$$

$$= (\lambda - x)^k \det(F - x I_{n-k})$$

quindi $x = \lambda$ è radice almeno k volte dell'equazione caratteristica $\Rightarrow a_\lambda \geq k$ $\square$

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è <u>diagonalizzabile</u> $\Leftrightarrow$

$$\sum_{\lambda \in Spec(A)} a_\lambda = n$$

e ogni autovalore è <u>regolare</u> cioè

$\forall \lambda \in Spec(A), \quad a_\lambda = g_\lambda$

$$g_\lambda = n - rk(A - \lambda I).$$

Se A <u>non</u> è diagonalizzabile $\Rightarrow$

o 1) $\sum a_\lambda \neq n \quad \Rightarrow \sum g_\lambda < n \ldots$

2) $\exists\, \lambda \in Spec(A) : g_\lambda < a_\lambda$

Esempi

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ eq. car $x^2+1=0$

non ci sono autovalori reali.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ eq. car. $(x-1)^2=0$

$a_1 = 2 \quad g_1 = 1$

Campo complesso.

poniamo $\underline{1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\underline{i} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\in GL(2, \mathbb{R})$

$\mathbb{C}$ sp. vettoriale generato da $\underline{1}$ e $\underline{i}$

$z = a \cdot \underline{1} + b \cdot \underline{i} \in \mathbb{C}$ con $a, b \in \mathbb{R}$

$a + bi$ $\qquad$ $\underline{i}^2 = -\underline{1}$

$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd)\underline{1} + (bc+ad)\underline{i}$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con $\underline{1}$

$(a,b) \neq (0\,0)$ $\det \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = a^2 + b^2 > 0 \Rightarrow$ ogni el. $\neq \underline{0}$ è invertibile.

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ è un campo.

Teorema fondamentale dell'algebra

Sia $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio di grado $n \geq 1 \Rightarrow p(x)$ ammette almeno una radice $\zeta \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow$ Sia $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio di grado n

$\Rightarrow$ $p(x)$ ha n radici in $\mathbb{C}$ contate con le debite molteplicità e dunque si spezza in fattori di I grado come

$$p(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

con $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ il campo $\mathbb{C}$ è <u>algebricamente chiuso</u>

<u>DIM</u>: Se $\deg p(x) = 1 \Rightarrow p(x) = (x - x_1)\alpha \Rightarrow \forall$ radice di $p(x)$ è in $\mathbb{C}$

Altrimenti sia $\deg p(x) = n \Rightarrow \exists\, \xi \in \mathbb{C}$:

$$p(\xi) = 0 \Rightarrow p(x) = (x - \xi)\, q(x)$$

con $\deg q(x) = n - 1$. Procedendo per induzione (n passi) si trovano n radici per $p(x)$.

$\square$

Def: Chiamiamo <u>reali</u> gli elementi di $\mathbb{C}$ della forma $\alpha \underline{1}$ e vediamo il campo $\mathbb{R}$ come un sottoinsieme (sottocampo) di $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Def Sia $z \in \mathbb{C}$; si dice coniugato di z l'elemento

$$\bar{z} = {}^t z$$

$$z = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{z} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= a + ib \qquad\qquad = a - ib$$

OSS: $\boxed{z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}}$

$$z \cdot \overline{z} = (a^2 + b^2)\, \underline{1}$$

poniamo $|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

ed osserviamo che

1) se $z \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2} = |a|$

$\Rightarrow z = a$

2) se $z \neq 0 \Rightarrow |z| \in \mathbb{R} \quad |z| > 0$

3) $z \cdot \left(\dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}\right) = 1 \quad \forall z \neq 0$

in particolare $\qquad z = a + ib$

$$\frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}$$

<u>oss</u>: dati ~~$x, \bar{y}$~~ $x, y \in \mathbb{C}$

$$\overline{(x+y)} = {}^t(x+y) = {}^tx + {}^ty = \bar{x} + \bar{y}$$

$$\overline{(xy)} = {}^t(xy) = {}^ty\,{}^tx = \bar{y}\bar{x} = \bar{x}\bar{y}$$

Il coniugio è un automorfismo di $\mathbb{C}$

$$\overline{} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$\overline{(ab+c)} \to \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{c} \quad \lrcorner$$

Sia $z \in \mathbb{C}$. Si chiama parte reale di z il valore $a \in \mathbb{R}$
$z = a + ib$

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

Si chiama parte immaginaria di z il valore $b \in \mathbb{R}$

$$Im(z) = \frac{i}{2}(\bar{z} - z).$$

Sia ora $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio a coeff. reali: $p(x) = p_0 + p_1 x + \dots + p_n x^n$

e sia $z \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$

$$p(z) = p_0 + p_1 z + \dots + p_n z^n$$

coniughiamo il tutto.

$$\overline{p(z)} = \overline{p_0 + p_1 z + \dots + p_n z^n} =$$

$$= \overline{p_0} + \overline{p_1}\,\overline{z} + \dots + \overline{p_n}(\overline{z})^n =$$

$$= p_0 + p_1 \overline{z} + \dots + p_n (\overline{z})^n = p(\overline{z})$$

Sia $p(x) \in \mathbb{R}[x]$; se $z \in \mathbb{C}$ è radice di $p(x)$ allora anche $\overline{z} \in \mathbb{C}$ è radice di $p(x)$.

In particolare $(x - z)(x - \overline{z})$ è un polinomio reale che divide $p(x)$.

$$(x-z)(x-\bar{z}) = x^2-(z+\bar{z})x+z\bar{z}$$

ma $z+\bar{z}$, $z\cdot\bar{z} \in \mathbb{R}$.

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} =$$ con $x \in \mathbb{R}$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\exp(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$$

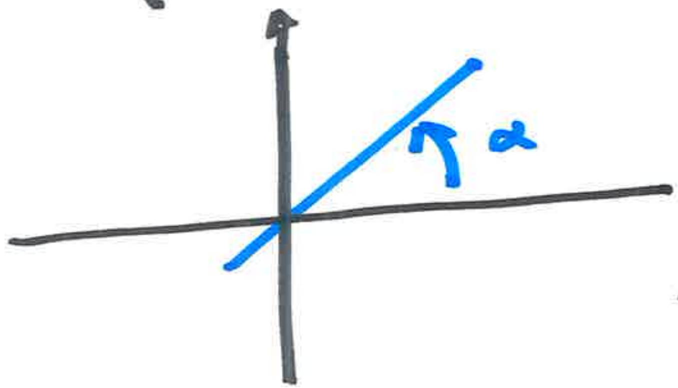
$$\exp(a\cdot i) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ai)^j}{j!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j a^{2j}}{(2j)!} + i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j a^{2j+1}}{(2j+1)!} =$$

$$= \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$



$\underline{\mathbb{1}}$

$$K e^{i\alpha}$$