4) β non degenere $\Rightarrow$ $\dim X^\perp = \dim V - \dim \mathcal{L}(X)$

5) $\Rightarrow$ $X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)$

D̲I̲M̲ : 5) Se $\dim X^\perp = n - \dim \mathcal{L}(X)$

$\dim X^{\perp\perp} = n - (n - \dim \mathcal{L}(X)) = \dim \mathcal{L}(X)$

ma $\mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp} \Rightarrow X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)$.

4) $X^\perp = \{ {}^T y : {}^T E_i B y = 0 \}$ ove $({}^T E_1, \dots {}^T E_k)$ é una base di $\mathcal{L}(X) \}$.

$= \{ y : \tilde{E} B y = 0$ ove $\tilde{E} = \begin{bmatrix} {}^T E_1 \\ \vdots \\ {}^T E_k \end{bmatrix} \}$

con $({}^T E_1 \dots {}^T E_k)$ base di $\mathcal{L}(X)$

$X^\perp$ é l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di matrice incompleta $\tilde{E}B$

ma B è non singolare $\Rightarrow rk(\tilde{E}B) = rk(\tilde{E}) =$
$= \dim \mathcal{L}(X)$.

per nullità + rango $\Rightarrow \dim X^{\perp} = n - rk(\tilde{E}B) =$
$= n - k$
ove $k = \dim X$. $\square$

ASSUMO β PRODOTTO SCALARE NON DEGENERE

$\det(B) \neq 0$.

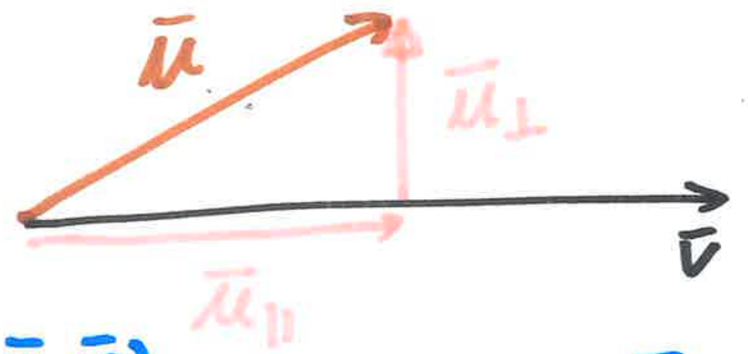
<u>Teorema</u>: Siano $\bar{u}, \bar{v}$ due vettori di $V_n(\mathbb{K})$, sia β un prod. scalare tale che $\beta(\bar{v}, \bar{v}) \neq 0$

allora è sempre possibile scrivere

$\bar{u}$ come $\bar{u} = \bar{u}_{\parallel} + \bar{u}_{\perp}$ ove

$\bar{u}_{\perp} \perp \bar{v}$, $\bar{u}_{\parallel} = \alpha \bar{v}$.

Il vettore $\bar{u}_{\parallel}$ è detto proiezione ortogonale di $\bar{u}$ su $\bar{v}$



DIM:

$$\bar{u}_{\parallel} := \frac{\beta(\bar{u},\bar{v})}{\beta(\bar{v},\bar{v})}\bar{v} \qquad \bar{u}_{\perp} = \bar{u} - \bar{u}_{\parallel}$$

$$\beta(\bar{u}_{\perp},\bar{v}) = \beta(\bar{u},\bar{v}) - \beta(\bar{u}_{\parallel},\bar{v}) =$$

$$= \beta(\bar{u},\bar{v}) - \frac{\beta(\bar{u},\bar{v})}{\beta(\bar{v},\bar{v})}\beta(\bar{v},\bar{v}) = 0. \qquad \square$$

<u>OSS</u>: La proiezione ortogonale su $\bar{v}$ é una applicazione lineare
$$\begin{cases} V_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(\bar{v}) \\ \bar{x} \to \dfrac{\beta(\bar{x},\bar{v})}{\beta(\bar{v},\bar{v})}\bar{v}. \end{cases}$$

Il valore $\dfrac{\beta(\bar{x},\bar{v})}{\beta(\bar{v},\bar{v})}$ è detto coeff. di Fourier di $\bar{x}$ rispetto a $\bar{v}$.

Esempi di prodotti scalari su $\mathbb{R}^n$ possiamo costruirli prendendo una qualsiasi matrice reale e simmetrica.

prodotto scalare std. su $\mathbb{R}^n$ è quello indotto dalla matrice identica

$$(x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

<u>Teorema</u>: Sia $\beta: V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ un prodotto scalare. Allora esiste una base di $V_n(\mathbb{K})$ rispetto cui la matrice di β è diagonale.

$\downarrow$

esiste una base di $V_n(\mathbb{K})$ che è ortogonale rispetto a β.

(la matrice di un prod. scalare è diagonale $\iff$ tutti i vettori della base rispetto cui è data sono a 2 a 2 ortogonali).

Idea di dim.

1) Trovare una base di $Rad(\beta) = V^{\perp}$

$(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_t)$

2) prendere un vettore $\bar{w}_1$ in $V(\mathbb{K}) \setminus Rad(\beta)$
con $\beta(\bar{w}_1, \bar{w}_1) \neq 0$ e aggiungerlo alla base

3) cercare in $W_1^{\perp}$ vettori non in $\mathcal{L}(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_t, \bar{w}_1)$
con $\beta(\bar{w}_2, \bar{w}_2) \neq 0$ e procedere di conseg.

IPOTESI $\boxed{1+1 \neq 0}$

Sia $\beta : V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ un prodotto scalare.
Si dice forma quadratica associata a β la funzione

$$q_\beta : \begin{cases} V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ \bar{v} \to \beta(\bar{v},\bar{v}). \end{cases}$$

Se $1+1 \neq 0$ allora data q è sempre possibile ricostruire β.

Data q_β forma quadratica, si ha

$$\beta(\bar{u},\bar{v}) = \frac{1}{2}\left[q(\bar{u}+\bar{v}) - q(\bar{u}) - q(\bar{v})\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\beta(\bar{u}+\bar{v},\bar{u}+\bar{v}) - \beta(\bar{u},\bar{u}) - \beta(\bar{v},\bar{v})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\beta(\bar{u},\bar{v}) + \beta(\bar{v},\bar{u}) + \beta(\bar{u},\bar{u}) + \beta(\bar{v},\bar{v}) + {} - \beta(\bar{u},\bar{u}) - \beta(\bar{v},\bar{v})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\beta(\bar{u},\bar{v}) + \beta(\bar{v},\bar{u})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\,\beta(\bar{u},\bar{v})\right] = \beta(\bar{u},\bar{v}). \qquad \square$$

Supponiamo che $W \leq V(\mathbb{K})$ e che $q_{|W} \equiv 0$

$\Rightarrow$ $\beta(\bar{u},\bar{v}) = 0 \quad \forall\, \bar{u},\bar{v} \in W.$

come costruire una base ortogonale

- $V_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Rad}(\beta) \oplus W$
- primo pezzo: base di $\mathrm{Rad}(\beta)$

$\rightarrow$ ci serve una base ortogonale di W.

$\rightarrow$ prendiamo una qualsiasi base $\mathcal{B}_W$ di W

$\mathcal{B}_W = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k)$ $\dim W = k$.

posso supporre $\beta(\bar{e}_1, \bar{e}_1) \neq 0$.

se così non fosse $\forall$ vettore $\bar{w}$ di W sarebbe con

$q(\bar{w}) = 0 \Rightarrow \beta$ identicamente nulla su $W \times W$

id. nulla su $Rad(\beta) \Rightarrow W \subseteq Rad(\beta)$ ↯

Se $W = \mathcal{L}(\bar{e}_1)$ fine.

Altrimenti: consideriamo $\bar{e}_1^{\perp} \cap W$ è un sott.

di dim $(k-1)$ che non contiene $\bar{e}_1^{\perp}$.

Sia $\bar{e}_2'$ un suo vettore con $\beta(\bar{e}_2', \bar{e}_2') \neq 0$

[altrimenti: $\bar{e}_1^{\perp} \cap W \subseteq Rad(\beta)$ ↯]

Aggiungiamo alla nostra base $\bar{e}_2'$.

$\rightarrow$ si procede fino a che non si ha tutta la base.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

<u>prodotti scalari reali</u>

Un prodotto scalare $\beta : V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è detto <u>definito positivo</u> se

$$\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{R}) \quad \beta(\bar{v},\bar{v}) \geq 0 \text{ e } \beta(\bar{v},\bar{v}) = 0 \Leftrightarrow \bar{v} = \underline{0}$$

In particolare se β definito positivo $\Rightarrow$ non vi sono vettori (non nulli) isotropi.

$$q(\bar{v}) = \beta(\bar{v},\bar{v}) \neq 0 \quad \forall \bar{v} \neq \underline{0}$$

poniamo $\quad \|\bar{v}\|_2 := \sqrt{\beta(\bar{v},\bar{v})}$.

Dato un prod. scalare definito positivo su $V_n(\mathbb{R})$ è sempre possibile trovare una base di $V_n(\mathbb{R})$ rispetto cui tale prodotto è rappresentato dalla matrice identica

$\downarrow$

[é sempre possibile trovare una base di $V_n(\mathbb{R})$ rispetto cui il prod. scalare è del tipo
$(x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.]

$\downarrow$

equivalente a trovare una base $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ di $V_n(\mathbb{R})$ tale che

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

BASE ORTO_NORMALE di $V_n(\mathbb{R})$

$j \neq i \Rightarrow \bar{e}_i^\circ \cdot \bar{e}_j^\circ = 0$

$i = j \Rightarrow \bar{e}_i^\circ \cdot \bar{e}_i^\circ = 1$

procedura di Gram-Schmidt.

Input: base $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ di $V_n(\mathbb{R})$

Output: base $\mathcal{B}^\circ = (\bar{e}_1^\circ \dots \bar{e}_n^\circ)$ di $V_n(\mathbb{R})$

1) ORTONORMALE $\bar{e}_i^\circ \cdot \bar{e}_j^\circ = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

2) TALE CHE $\forall k \leq n$

$\mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k) = \mathcal{L}(\bar{e}_1^\circ \dots \bar{e}_k^\circ)$

$\|\bar{x}\| = \sqrt{\beta(\bar{x},\bar{x})}$

1) $\bar{e}_1 \in \mathcal{B}$, $\beta(\bar{e}_1,\bar{e}_1) \neq 0$

$$\bar{e}_1^{\circ} := \frac{1}{\sqrt{\beta(\bar{e}_1,\bar{e}_1)}}\bar{e}_1 = \frac{1}{\|\bar{e}_1\|}\bar{e}_1$$

2) $\bar{e}_2 \in \mathcal{B}$

$$\bar{e}_2' = \bar{e}_2 - \beta(\bar{e}_2,\bar{e}_1^{\circ})\cdot \bar{e}_1^{\circ}$$

$$\bar{e}_2^{\circ} = \frac{1}{\|\bar{e}_2'\|}\bar{e}_2'$$

$\vdots$

k) $\bar{e}_k \in \mathcal{B}$ $\quad \bar{e}_k' = \bar{e}_k - \sum_{j<k} \beta(\bar{e}_k,\bar{e}_j^{\circ})\bar{e}_j^{\circ}$

$$\bar{e}_k^{\circ} = \frac{1}{\|\bar{e}_k'\|}\bar{e}_k'$$

fino a $k=n$.

$j<k$

$$\beta(\bar{e}_k^{\bullet}, \bar{e}_\ell^{\bullet}) =$$

$$= \frac{1}{\|\bar{e}_k'\|} \beta(\bar{e}_k', \bar{e}_\ell^{\bullet}) =$$

0 se $j \neq \ell$
1 se $j = \ell$

$$= \frac{1}{\|\bar{e}_k'\|} \left[\beta(\bar{e}_k, \bar{e}_\ell^{\bullet}) - \sum_{j<k} \beta(\bar{e}_k, \bar{e}_j^{\bullet}) \beta(\bar{e}_j^{\bullet}, \bar{e}_\ell^{\bullet}) \right]$$

$$= \frac{1}{\|\bar{e}_k'\|} \left[\beta(\bar{e}_k, \bar{e}_\ell^{\bullet}) - \beta(\bar{e}_k, \bar{e}_\ell^{\bullet}) \right] = 0$$

$\square$

$$\mathcal{B} = (\underset{\bar{e}_1}{(1\,0\,0)}, \underset{\bar{e}_2}{(0\,0\,1)}, \underset{\bar{e}_3}{(1\,2\,3)})$$

$$\bar{e}_1^{\circ} = \bar{e}_1$$

$$\bar{e}_2^{\circ} = \bar{e}_2$$

$$\bar{e}_3^{\circ} = (0\,1\,0)$$

$$\mathcal{B} = ((1\,2\,3), (1\,0\,0), (0\,0\,1))$$

$$\bar{e}_1^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{15}}(1\,2\,3) \qquad \bar{e}_2^{\prime} = (1\,0\,0) - \frac{1}{\sqrt{15}}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)(1\,2\,3)$$

etc.

Def: • Si dice **prodotto scalare Euclideo** su $V_n(\mathbb{R})$ un prodotto scalare definito positivo.

• Si dice **norma euclidea** (norma-2) la norma $\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$ ove $\bar{v}$ è un prodotto scalare euclideo.

• Lo spazio vettoriale $V_n(\mathbb{R})$ è detto in tal caso **spazio vettoriale euclideo** e lo si denota anche col simbolo $V_n^{\circ}(\mathbb{R})$.

In generale, dato uno sp. vettoriale $V_n(\mathbb{R})$ si dice **norma** una funzione

$$\|\cdot\| \begin{cases} V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ \bar{v} \to \|\bar{v}\| \end{cases}$$

che soddisfi le seguenti proprietà

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{R})$, $\|\bar{v}\| \geq 0$
2) $\|\bar{v}\| = 0 \iff \bar{v} = \underline{0}$
3) $\|\alpha \bar{v}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{v}\|$
4) $\forall \bar{v}, \bar{w} \in V_n(\mathbb{R})$: $\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|$

DATO β prod. scalare def. positivo

$\|\bar{x}\| := \sqrt{\beta(\bar{v}, \bar{v})}$ é una norma.

però $\exists$ anche norme che <u>non</u> vengono da prodotti scalari $\quad \bar{v} \in \mathbb{R}^n$

Es. $\quad \|\bar{v}\|_1 = \sum |v_i|$

$$\|\bar{v}\|_p := \left(\sum |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \geq 1$$

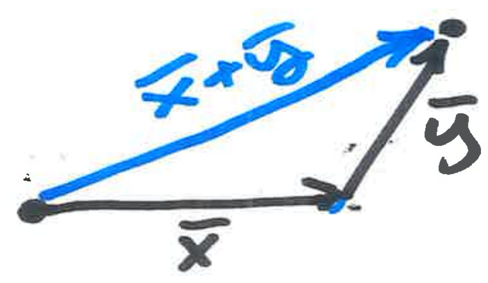
$$\|\bar{v}\|_\infty := \max\{ |v_i| \mid i = 1 \dots n \}.$$

La nozione di norma corrisponde a quella di "lunghezza" di un vettore.

$\|\underline{0}\| = 0 \qquad$ se $\bar{x} \neq \underline{0}$, $\|\bar{x}\| > 0$

$\|\alpha \bar{x}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|$

$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ disuguaglianza triangolare



$\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$.

prodotto scalare Euclideo. $\beta(\bar{v},\bar{w}) = \bar{v}\cdot\bar{w}$

DISUG.

1) Cauchy-Schwartz

$$|\bar{v}\cdot\bar{w}| \leq \|\bar{v}\|\cdot\|\bar{w}\|$$

2) Triangolare

$$\|\bar{v}+\bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|$$

DIM

1) Se $\bar{v} = \underline{0}$ o $\bar{w} = \underline{0}$ $\Rightarrow$ $|\bar{v} \cdot \bar{w}| \leq \|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\| = 0$ ✓

$|\bar{v} \cdot \bar{w}| = 0$

Consideriamo il vettore

$\alpha \bar{v} + \bar{w}$

e calcoliamo

$$f(\alpha) = (\alpha \bar{v} + \bar{w}) \cdot (\alpha \bar{v} + \bar{w}) =$$

$$= \alpha^2 \bar{v} \cdot \bar{v} + \alpha \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{w} \cdot \alpha \bar{v} + \bar{w} \cdot \bar{w} =$$

$$= \alpha^2 \|\bar{v}\|^2 + 2 \alpha \bar{v} \cdot \bar{w} + \|\bar{w}\|^2 \geq 0$$

$$x^2 \|\bar{v}\|^2 + 2x (\bar{v} \cdot \bar{w}) + \|\bar{w}\|^2 = 0$$

non deve avere 2 radici distinte

$$\frac{\Delta}{4} \leq 0$$

$$(\bar{v} \cdot \bar{w})^2 - \|\bar{v}\|^2 \cdot \|\bar{w}\|^2 \leq 0$$

$$|\bar{v} \cdot \bar{w}| \leq \|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\| \qquad \square$$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\|\bar{v} + \bar{w}\|^2 = (\bar{v} + \bar{w}) \cdot (\bar{v} + \bar{w}) =$$

$$= \|\bar{v}\|^2 + 2\bar{v} \cdot \bar{w} + \|\bar{w}\|^2 \leq$$

$$\|\bar{v}\|^2 + 2|\bar{v} \cdot \bar{w}| + \|\bar{w}\|^2 \leq$$

$$\|\bar{v}\|^2 + 2\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\| + \|\bar{w}\|^2 =$$

$$= (\|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|)^2 \qquad \square$$

Dati $\bar{v}, \bar{w}$ definisco il coseno dell'angolo fra $\bar{v}$ e $\bar{w}$ il valore

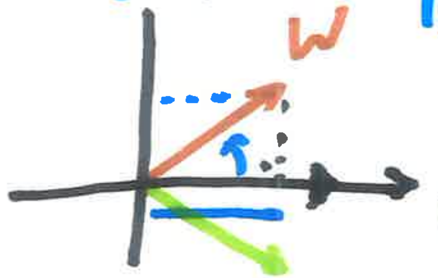
$$\cos \widehat{vw} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \|\bar{w}\|}$$

per C/S. $-1 \leq \cos \widehat{vw} \leq 1$

se $\bar{v} \perp \bar{w} \Rightarrow \cos \bar{v}\bar{w} = 0$

se $\bar{v} \parallel \bar{w} \Rightarrow \bar{v} = \alpha \bar{w} \Rightarrow \dfrac{\alpha \bar{w} \cdot \bar{w}}{\|\alpha \bar{w}\| \|w\|} =$

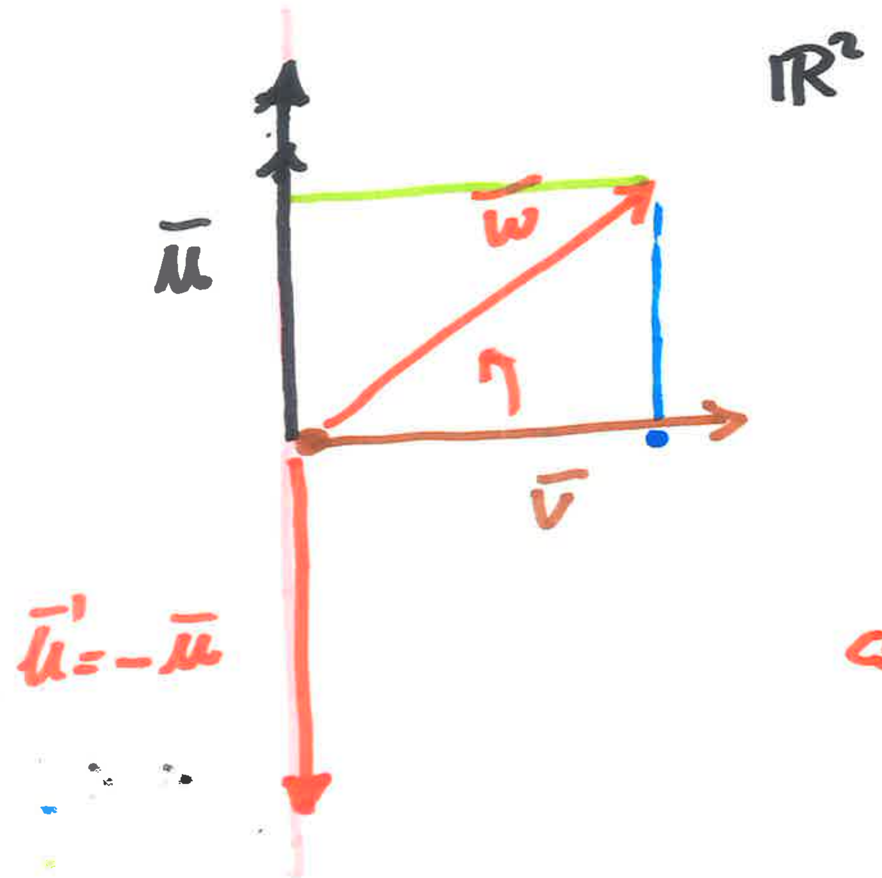
$$= \frac{\alpha}{|\alpha|} \frac{\|\bar{w}\|^2}{\|\bar{w}\|^2} = \frac{\alpha}{|\alpha|}$$



$\|w\| = 1$

Se $\alpha > 0 \Rightarrow +1$
$\alpha < 0 \Rightarrow -1$

<u>OSS</u>: se vogliamo definire $\sin \vartheta$ ci serve considerare la proiezione ortogonale di $\overline{w}$ su di un vettore ortogonale a $\overline{v}$



$\|\overline{v}\| = 1$

$\|\overline{w}\| = 1$

$\cos \vartheta = \overline{v} \cdot \overline{w}$

$\overline{u} \perp \overline{v}$

$\|\overline{u}\| = 1$

Def: Si dice che 2 basi [ortonormali] sono orientate allo stesso modo se il det della matrice di cambiamento di base dall'una all'altra è $\underline{\underline{+1}}$; sono orientate in modo opposto se il det di tale matrice è $\underline{\underline{-1}}$

$\Rightarrow$ prendiamo $\bar{u}$ tale che $(\bar{v}, \bar{u})$ è orientato come la base canonica.

OSS: Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi ortonormali rispetto il medesimo prodotto scalare $\Rightarrow$ la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ Quindi è <u>ortogonale</u> (i.e. le sue righe/colonne sono un sistema di vettori ortonormali) e ha $\det = \pm 1$

$$\bar{V} = {}^{t}[x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} = \cancel{{}^{t}[x_1' \dots \bar{x}_n}$$

$$= [x_1' \dots x_n'] \begin{bmatrix} \bar{e}_1' \\ \vdots \\ \bar{e}_n' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_1' \\ \vdots \\ \bar{e}_n' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$$

con $\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n'$ base ortogonale (=> vettori ortonormali) e stessa cosa per $\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n$

$$\overline{e}'_i \cdot \overline{e}'_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq 0 \end{cases}$$

$$\vec{e}_i \cdot \overline{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}$$

la matrice del prod. scalare rispetto a $\mathcal{B}$ e rispetto a $\mathcal{B}'$ è la matrice identica; d'altro canto il cambio di base per i prod. scalari

$\#\lambda$ si effettua con $B' = {}^tA\,B\,A$

ma abbiamo $\underline{I} = {}^tA\,I\,A = {}^tA\,A \Rightarrow {}^tA = A^{-1}$.

$\Rightarrow \det({}^tA\,A) = \det({}^tA)\det(A) = \det(A)^2 = +1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(A) = \pm 1.$

Def: A ortogonale $\Leftrightarrow {}^{T}\!A = A^{-1}$

Se $V_n^{\circ}(\mathbb{R})$ è euclideo $\Rightarrow$ possiamo caratterizzare la proiezione ortogonale di un vettore $\bar{v}$ su di un sottospazio W come

a) $\exists!\ \bar{v}_{\parallel} \in W : \bar{v} = \bar{v}_{\parallel} + \bar{w}_{\perp}$ con $\bar{v}_{\perp} \in W^{\perp}$

b) $\bar{v}_{\parallel} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_j}{\bar{w}_j \cdot \bar{w}_j} \bar{w}_j$

ove $(\bar{w}_1 \ldots \bar{w}_j)$ base di W ortogonale

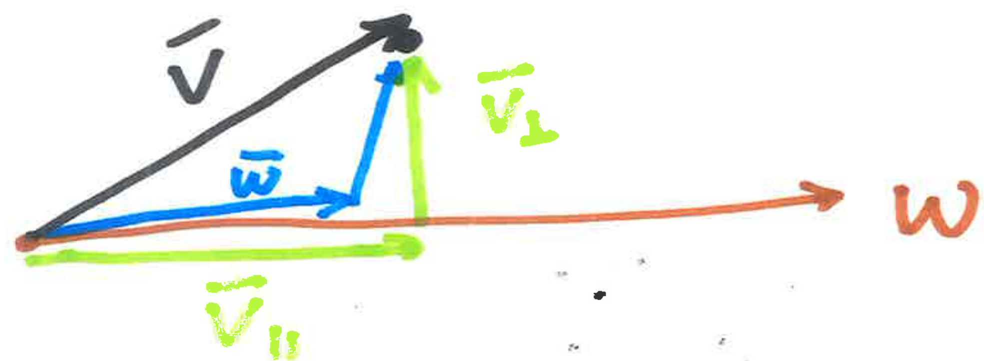
[si vede subito che $(\bar{v} - \bar{v}_{\parallel}) \cdot \bar{w}_j = \bar{v} \cdot \bar{w}_j - \bar{v} \cdot \bar{w}_j = 0$]

c) $\bar{v}_{\parallel}$ è il vettore di W tale che $\forall \bar{w} \in W$

$\|\bar{v}-\bar{w}\|$ é minima.

cioé $\quad \|\bar{v}-\bar{v}_{\parallel}\| \leq \|\bar{v}-\bar{w}\| \quad \forall \bar{w} \in W.$

"$\bar{v}_{\parallel}$ é la migliore approssimazione a $\bar{v}$ che è contenuta in W"



calcoliamo $\|\bar{v}-\bar{w}\|^2 = (\bar{v}-\bar{w})\cdot(\bar{v}-\bar{w}) =$

$$= (\bar{v}-\bar{w}+\bar{v}_{\parallel}-\bar{v}_{\parallel})\cdot(\bar{v}-\bar{w}+\bar{v}_{\parallel}-\bar{v}_{\parallel})$$

$$= (\bar{v}_{\perp}+\bar{v}_{\parallel}-\bar{w})\cdot(\bar{v}_{\perp}+\bar{v}_{\parallel}-\bar{w}) =$$

$$= \bar{v}_\perp \cdot \bar{v}_\perp + (\bar{v}_\parallel - \bar{w}) \cdot (\bar{v}_\parallel - \bar{w}) +$$

$$2\, \bar{v}_\perp \cdot (\bar{v}_\parallel - \bar{w}) = 0$$ perché $\bar{v}_\parallel - \bar{w} \in W$ e $\bar{v}_\perp \perp W$.

$$= \|\bar{v}_\perp\|^2 + \|\bar{v}_\parallel - \bar{w}\|^2 \geq \|\bar{v}_\perp\|^2$$

In particolare $\|\bar{v} - \bar{w}\|$ é minimo $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\bar{w} = \bar{v}_\parallel$ ed in tale caso

$\|\bar{v} - \bar{w}\| = \|\bar{v}_\perp\|$.

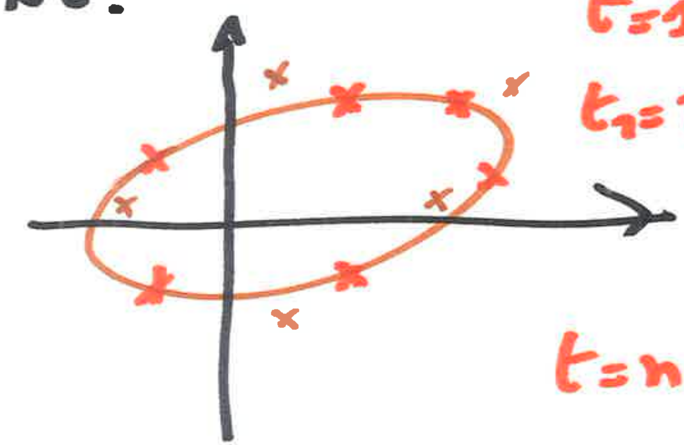
chiamiamo distanza di $\bar{v}$ da W il valore $\|\bar{v}_\perp\|$.

se $\|v_\perp\| = 0 \Rightarrow \bar{v} \in W$.

Risoluzione di un sistema lineare ai minimi quadrati.

$\boxed{AX=B}$ sistema lineare

- compatibile $\Longleftrightarrow$ $rk(A)=rk(A|B)$ $\rightarrow$ si risolve
- incompatibile $\rightarrow$ FINE.



$t=1$ (x_1, y_1)

$t_2=2$ (x_2, y_2)

$\vdots$

$t=n$ (x_n, y_n)

$$\begin{cases} a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}x \\ \quad +a_{22}y^2+2a_{23}y+a_{33}=0 \\ a_{11}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + 2a_{13}x_1 + a_{22}y_1^2 + 2a_{23}y_1 + a_{33} = 0 \\ x_2^2 + 2a_{12}x_2y_2 + 2a_{13}x_2 + \dots = 0 \\ \vdots \\ x_n^2 + 2a_{12}x_ny_n + \dots = 0 \end{cases}$$

n equazioni nelle incognite

$a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}$.

→ Sostituiamo il sistema lineare $AX = B$ con un sistema lineare "vicino" in cui al posto di B prendiamo un vettore B' il più vicino possibile a B ma tale che B

$AX = B'$ sia risolubile.

$\rightarrow$ cerchiamo B' nello sp. vettoriale generato dalle colonne di A e tale che $\|B - B'\|^2$ sia la più piccola possibile.

$$AX = B \rightsquigarrow AX = B'$$

supponiamo di avere una soluzione X' del sistema $AX = B' \Rightarrow (B' - B) \perp \mathcal{C}(A)$

$\Rightarrow$ in particolare $(AX' - B) \in \mathcal{C}(A)^{\perp}$

$$\Leftrightarrow {}^{t}A\,(AX' - B) = \underline{0}$$

$\Leftrightarrow\ {}^{T}\!A A X' = {}^{T}\!A B$

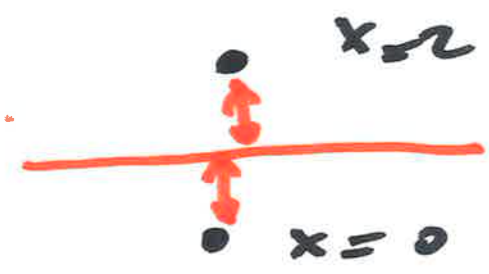
cioé trovare la soluzione cercata "vicina" corrisponde a risolvere

$$\boxed{({}^{T}\!A A) X = {}^{T}\!A B}$$

Esempio

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$${}^{T}\!A A = [1\ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [2]$$



$${}^{T}\!A B = [2]$$

$$2x = 2 \rightarrow x = 1$$