Sistemi lineari di m equazioni in n incognite.

→ collezione di m equazioni di I grado in incognite $x_1, x_2 \dots x_n$.

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$a_{ij} \in \mathbb{K}$
$b_i \in \mathbb{K}$

si dice soluzione di $(*)$ un elemento $(s_1 s_2 \dots s_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che sostituiti ad $x_1 \dots x_n$ i valori $s_1 \dots s_n$ le eq. di $(*)$ diventano tutte identità.

$$\left.\begin{aligned} 0x &= 1 \\ x &= 1 \\ 0 \cdot x &= 0 \end{aligned}\right] \text{in } x$$

Un sistema lineare è detto

- <u>compatibile</u> se ammette soluzione.
- <u>incompatibile</u> se non ammette soluzioni.
- <u>omogeneo</u> se tutti i "termini noti" bi sono uguali a 0.

<u>OSS</u>: Un sistema omogeneo è sempre compatibile in quanto $(x_1 \dots x_n) = (00 \dots 0)$ è una sua soluzione.

DATO un sistema lineare:

1) è compatibile?

2) determinare le sue soluzioni.

Teorema (Rouché-Capelli).

Sia (*) $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

un sistema lineare. Chiamiamo $A = (a_{ij})_{i=1,\, j=1}^{m,\, n}$ matrice incompleta del sistema, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ vettore dei termini noti del sistema e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ vettore delle incognite.

Allora il sistema si riscrive come

$$(*) \quad \boxed{AX = B} \qquad \text{(forma matriciale)}$$

ed esso è compatibile $\Leftrightarrow$ $rk(A) = rk(A|B)$

ove $A|B$ = matrice completa del sistema =

= matrice che si ottiene da A aggiungendo la colonna dei termini noti.

DIM: Sia $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ X \to AX \end{cases}$. L'equazione $(*)$ si può scrivere come $f_A(X) = B$ ma questa è risolubile $\Leftrightarrow$ $B \in \operatorname{Im} f_A$ ma $\operatorname{Im} f_A$ è generata dalle colonne di A.

$\Rightarrow \quad AX=B$ è risolubile $\Leftrightarrow$ $B \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow$

$$\underbrace{\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A|B)}$$

ma ovviamente $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(A|B)$

quindi $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A|B) \Leftrightarrow \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(A|B)$

$\Leftrightarrow rk(A) = rk(A|B)$. $\square$

N.B. $\quad rk(A)+1 \geq rk(A|B) \geq rk(A)$.

OSS: L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare $AX=B$ dipende solamente dallo sp. vettoriale generato dalle equazioni stesse (= righe di $A|B$).

Sia $AX = B$ un sistema lineare e sia

S una sua soluzione (se esiste) $\Rightarrow$

S è anche soluzione di ogni comb. lineare delle equazioni del sistema.

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

righe.

$$\begin{cases} R_1 X = b_1 \\ R_2 X = b_2 \\ \vdots \\ R_m X = b_m \end{cases}$$ eq.

$$R_1 S = b_1$$
$$R_2 S = b_2$$
$$\vdots$$
$$R_m S = b_m$$

uguaglianze.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (R_i S) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i$$

$$\left[\sum_i (\alpha_i R_i)\right] S = \sum_i \alpha_i b_i$$

e quindi S è soluzione della c. lineare delle equazioni.
$$\left[\sum_i (\alpha_i R_i)\right] X = \sum_i \alpha_i b_i$$

viceversa se S è soluzione ~~allora S è ovviamente~~ di ogni eq. nello sp. vettoriale generato da certe equazioni (*)
$\Rightarrow$ è ovviamente anche soluzione delle eq. di partenza.

In particolare, noi possiamo cercare le soluzioni di un sistema lineare $AX = B$

costruendo un nuovo sistema lineare $A'X = B'$

ove le righe di $(A'|B')$ sono una base dello sp. vett.

generato dalle righe di $(A|B)$.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 \qquad\qquad\qquad = 2 \\ \qquad\qquad\quad x_3 + x_4 = 0 \\ \cancel{8x_1 - 10x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4} \\ \cancel{2x_1 + 3x_2 \qquad + 2x_4 = 1} \end{cases}$$

il sistema che si ottiene in cui le eq. sono tutte linearmente indipendenti è detto sistema principale equivalente.

Def: Due sistemi compatibili sono equivalenti $\iff$ essi hanno le stesse soluzioni. $\lrcorner$

Risoluzione di sistemi compatibili

1) Determinare il "numero" di soluzioni
2) Determinare le soluzioni.

Teorema: Sia $AX = B$ un sistema lineare compatibile $\Rightarrow$ ogni soluzione del sistema si scrive come $X = \bar{X} + Z$ ove

$\bar{X}$ = soluzione particolare del sistema

$Z \in \operatorname{Ker}(A) = \{Y \mid AY = 0\}$.

= soluzione del sistema omogeneo associato.

→ CONSEGUENZA: le soluzioni del sistema compatibile $AX = B$ sono in corrispondenza 1-1 con gli elementi di $\ker(A)$ che è uno spazio vettoriale di $\dim = n - rk(A)$. (per il teorema nullità + rango). Diciamo che esse sono $\infty^{n-rk(A)}$ con $\infty^0 = 1$.

DIM: Siano X_1 e X_2 due soluzioni di $AX = B$

$$\Rightarrow \quad A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \quad X_1 - X_2 \in \ker(A).$$

In particolare se $\overline{X}$ è una soluzione fissata di $AX = B$

$\Rightarrow \quad A(\bar{X}+Z) = A\bar{X} + AZ = B + \underline{0} = B$ è soluzione di $AX=B$.

viceversa se $\bar{X}'$ è un'altra soluzione di $AX=B$

$\Rightarrow \quad \bar{X}' - \bar{X} = Z \in \operatorname{Ker}(A)$ e dunque

$\bar{X}' = Z + \bar{X}$ #

OSS: L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare $AX=B$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ $\Leftrightarrow B=\underline{0}$ ed in tal caso esso è $\operatorname{Ker}(A)$.

DIM: Se $B \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{0}$ non è soluzione di $AX=B$ $\Rightarrow$ non può essere che l'insieme delle soluzioni sia un sottospazio.

Altrimenti $\operatorname{Ker}(A) = S$ insieme soluzioni e $\ker(A)$ è sottospazio, infatti se

$\bar{x}, \bar{y} \in \ker(A) \Rightarrow \quad A\bar{x} = \underline{0} = A\bar{y}$

e $A(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha A\bar{x} + \beta A\bar{y} = \alpha\underline{0} + \beta\underline{0} = \underline{0}$ #

<u>N.B.</u> Il teorema è importante per 2 motivi (almeno)

1) dice quale è il significato di "∞^{n-k}"

2) ci permette di scrivere con un numero finito di vettori l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare, anche quando queste non sono finite.

↳ DIAMO <u>UNA</u> SOLUZIONE PARTICOLARE $\bar{X}$
<u>UNA</u> BASE DI $\ker(A)$
($n - rk(A)$ vettori).

Risoluzione di sistemi lineari.

$ax = b$
$x = a^{-1} b$

1) Sistema di Cramer.

$$AX = B$$

sistema lineare con $A \in GL(n, \mathbb{K})$

- n equazioni
- n incognite
- $\det(A) \neq 0$.

$\Rightarrow \exists\, A^{-1} \in GL(n, \mathbb{K})$ e $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$$A^{-1}(AX) = X$$

quindi una soluzione del sistema è $\bar{X} = A^{-1}B$

D'altro canto per nullità-rank il numero di sol è

$$\infty^{n-n} = \infty^0 = 1$$

oppure se volete si può vedere il fatto supponendo $\bar{x}, \bar{y}$ due soluzioni $\Rightarrow$

$$A\bar{x} = B = A\bar{y}$$

$$\Rightarrow \underbrace{A^{-1}A\bar{x}}_{= \bar{x}} = A^{-1}B = \underbrace{A^{-1}A\bar{y}}_{= \bar{y}}$$

un sistema di Cramer ha <u>una ed una sola</u> soluzione.

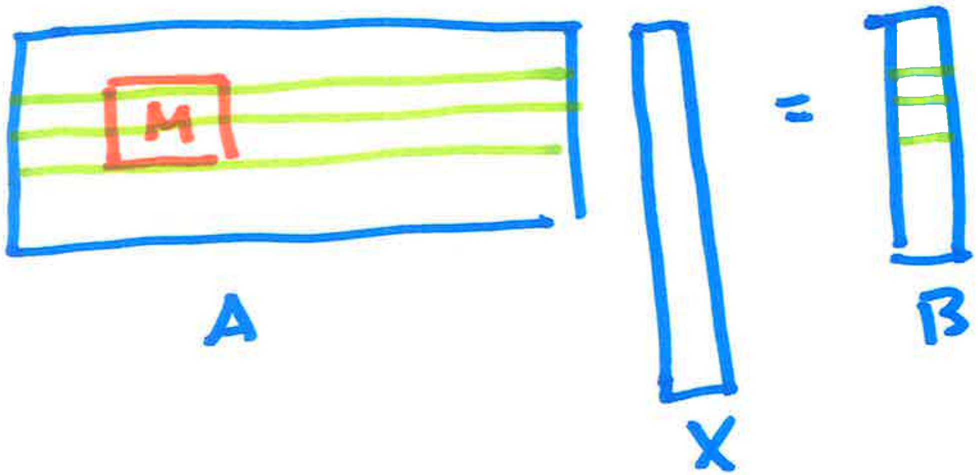
In particolare $AX = \underline{0}$ con $A \in GL(n, \mathbb{K})$ ha come unica soluzione $\underline{0}$.

2) Sistema $AX=B$ "generale" con $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

e $rk(A)=k=rk(A|B)$ compatibile.

2.1) Trovare un sistema principale equivalente

$A'X=B'$



M = minore fond. in A

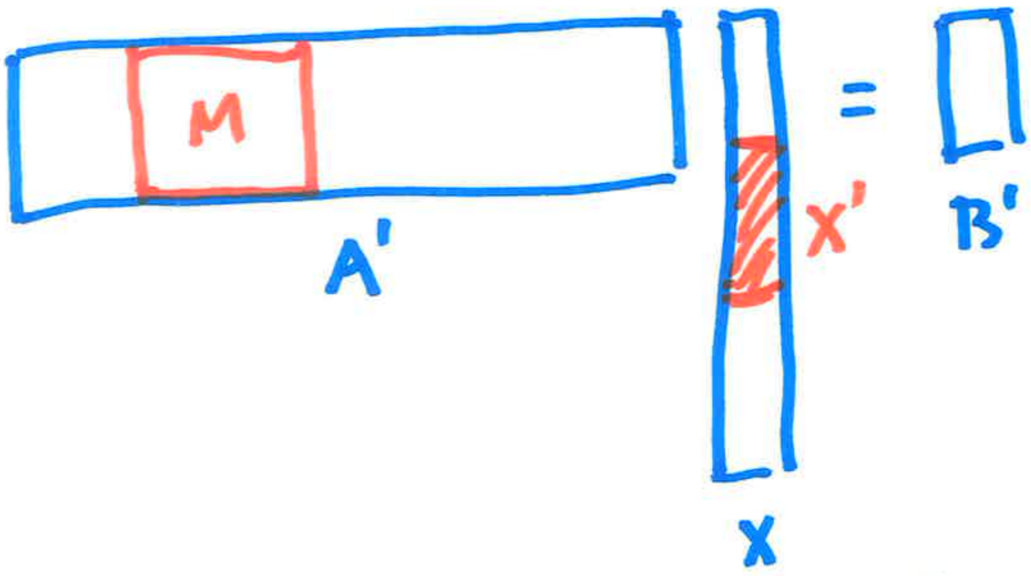
$\det(M) \neq 0$

$M \in \mathbb{K}^{k,k}$

ogni orlato di M in $A|B$ ha $\det = 0$

Una base dello s.v. $\mathcal{R}_o(A|B)$ è data dalle righe intercettate da M.

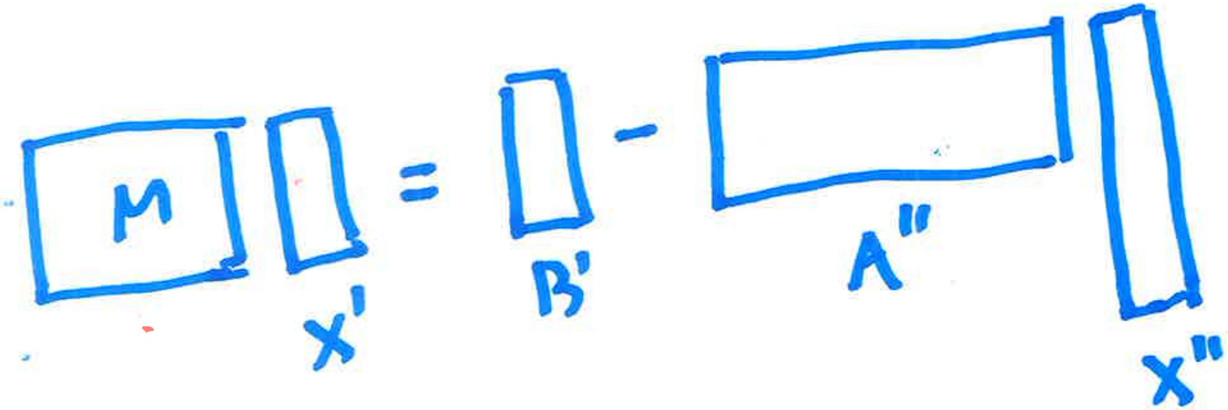
$\Rightarrow$ definiamo A' e B' di conseguenza



$A' \in \mathbb{K}^{k,n}$

$(A'|B') \in \mathbb{K}^{k,n+1}$

2.2) Trattiamo tutte le incognite che corrispondono a colonne di A' non intercettate da M come parametri e le spostiamo a dx dell'uguale



con $X = X' \cup X''$

Si risolve il sistema "come se fosse di CRAMER"

$$X' = M^{-1}B' - M^{-1}A''X''$$

facendo variare in $\forall$ i modi possibili i param in X''.

[in particolare una sol. particolare è data da

$$\begin{cases} X' = M^{-1}B' \\ X'' = \underline{0} \end{cases}$$

mentre le sol. del sistema omogeneo associato sono date

$X' = -M^{-1}A''X''$ con X'' che varia in tutti i modi possibili. #

Es:

$$A|B = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$A'|B' = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2 zero per 5 ↓ Part.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X} = \begin{array}{cccccc} (1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

soluzione generale

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

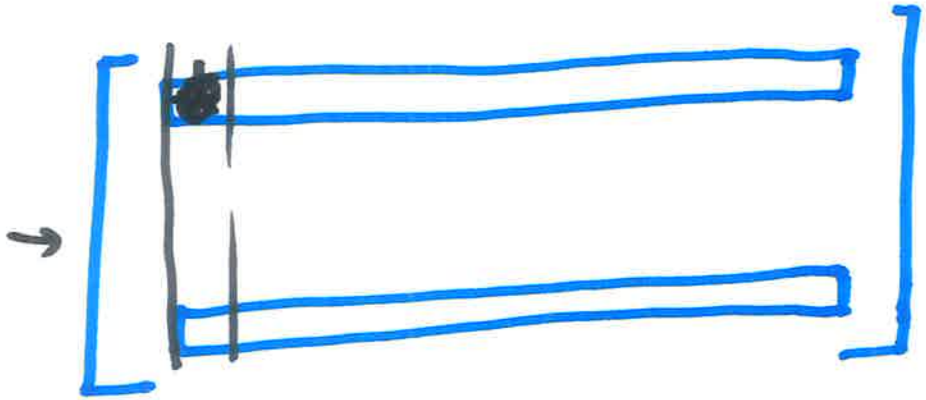
AGGIUNGO EQ. BANALI $x_3 = x_3$ $x_4 = x_4$ $x_6 = x_6$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cancel{x_3} \begin{bmatrix} x_3 + x_6 \\ x_3 + x_4 + x_6 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} =$$

particolare

base delle sol. sist. omogeneo

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



A | B

RREF

1) ogni riga ha come prima entrata $\neq 0$ un 1
2) nella colonna che corrisponde ad una prima entrata di riga c'è un'unica entrata non nulla.
3) la prima entrata non nulla della riga j è più a dx della prima entrata $\neq 0$ della riga i se $j > i$

consideriamo $i=1, r=1$

1) se tutte le entrate nella colonna i sono $=0$
$\Rightarrow i = i+1$ e ripartiamo.

2) Troviamo la prima riga ~~nella~~ che ha entrata non nulla nella colonna j e la scambiamo con la riga r esima.

3) Dividiamo la riga r-esima per il valore di a_{rj}

4) $\forall k \neq r$ sottraiamo alla riga k-esima la riga r-esima moltiplicata per a_{kj}

5) se $r <$ # equazioni torniamo al punto 1.

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 4 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 3 & 5 & 6 & 0 & 5 & 3
\end{array}\right]
\sim
$$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 4 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 3 & 5 & 6 & 0 & 5 & 3
\end{bmatrix}
\sim
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 3 & 5 & 6 & 0 & 5 & 3
\end{bmatrix}
$$

$$
\sim
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0
\end{bmatrix}
\sim
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & -1 & -6 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\sim
$$

$$
\sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc|c}
0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Prodotti scalari

$\mathbb{K}$ = campo $\qquad \mathbb{K} = \mathbb{R}$

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.
Si dice prodotto scalare su $V(\mathbb{K})$ una
forma bilineare simmetrica $\beta : V(\mathbb{K}) \times V(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

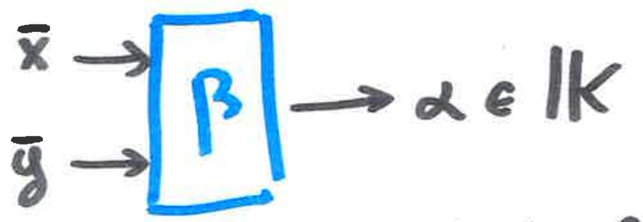
forma: funzione a valori in $\mathbb{K}$.
(codominio = $\mathbb{K}$).

bilineare: DOMINIO È $V \times V$ (2 vettori in ingresso)
E LINEARE RISPETTO ENTRAMBI.

$$\beta(a\bar{v} + b\bar{w}, \bar{u}) = a\beta(\bar{v}, \bar{u}) + b\beta(\bar{w}, \bar{u})$$

$$\beta(\bar{v}, a\bar{u} + b\bar{w}) = a\beta(\bar{v}, \bar{u}) + b\beta(\bar{v}, \bar{w}).$$

$\forall a, b \in \mathbb{K}, \quad \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V(\mathbb{K}).$



tale che se un input è fissato $\Rightarrow$ β è lineare in quello lasciato libero.

simmetrica: $\beta(\bar{v}, \bar{w}) = \beta(\bar{w}, \bar{v})$

<u>OSS</u>: Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di $V(\mathbb{K})$

e siano $\bar{u} = a_1 \bar{e}_1 + \dots + a_n \bar{e}_n$, $\bar{v} = \beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_n \bar{e}_n$ due vettori di V.

$$\Rightarrow \beta(\bar{u}, \bar{v}) = \beta\left(\sum_i a_i \bar{e}_i, \sum_j \beta_j \bar{e}_j\right) =$$

$$= \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j \, \beta(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$$

I valori di $\beta(\bar{u}, \bar{v})$ dipendono solo dalle componenti di $\bar{u}$ e $\bar{v}$ rispetto la base $\mathcal{B}$ e dai valori di $\beta(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ per $i, j = 1 \dots n$.

chiamiamo $^T X = [\alpha_1 \dots \alpha_n]$ $\quad$ $^T Y = [\beta_1 \dots \beta_n]$

e pongo $\quad B = \begin{bmatrix} \beta(\bar{e}_1, \bar{e}_1) & \dots & \beta(\bar{e}_1, \bar{e}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \beta(\bar{e}_n, \bar{e}_1) & \dots & \beta(\bar{e}_n, \bar{e}_n) \end{bmatrix}$

posto questo si vede che 1) $\beta(\bar{u}, \bar{v}) = {}^T X B Y$

2) poiché $\beta(\bar{u},\bar{v}) = \beta(\bar{v},\bar{u}) \ \forall \bar{u},\bar{v} \in V$

$$\beta(\bar{e}_i,\bar{e}_j) = \beta(\bar{e}_j,\bar{e}_i) \ \forall i,j$$

$\Rightarrow$ la matrice B coincide con la sua trasposta $\Rightarrow B = {}^tB$ e B è una matrice simmetrica.

B è detta matrice di β rispetto la base $\mathcal{B}$.

Def: Sia β un prodotto scalare e siano $\bar{v}, \bar{w} \in V$. Si dice che $\bar{v}$ e $\bar{w}$ sono <u>ortogonali</u> (rispetto a β) e si scrive $\bar{v} \perp \bar{w}$ ($\perp$ = perp) se $\beta(\bar{v},\bar{w}) = 0$.

Se $X \subseteq V(\mathbb{k})$ poniamo

$$X^{\perp} := \{ \bar{y} \in V(\mathbb{k}) \mid \forall \bar{x} \in X : \bar{x} \perp \bar{y} \}.$$

Def: Un vettore $\bar{v} \in V(\mathbb{k})$ con $\bar{v} \perp \bar{v}$ è detto vettore $\underset{\bar{v} \neq \underline{0}}{\text{isotropo}}$.

Def: Si dice RADICALE di β l'insieme $V^{\perp}$ ovvero l'insieme di tutti i vettori $\bar{v} \in V$ tali che $\forall \bar{x} \in V : \bar{v} \perp \bar{x}$.

$\underline{0} \in \mathrm{Rad}(\beta)$.

1) $\mathrm{Rad}(\beta) \leq V$

2) Se $\mathrm{Rad}(\beta) = \{\underline{0}\} \Rightarrow \beta$ è detta non-degenere

Teorema: 1) Sia β un prodotto scalare

ALLORA

1) $\forall\ X \subseteq V(\mathbb{K})$, $X^{\perp}$ è un sott. vettoriale

2) $\forall\ X \subseteq V(\mathbb{K})$: $\mathcal{L}(X) \leq X^{\perp\perp}$

3) β è non degenere $\Leftrightarrow$ la matrice$^{\beta}$ che la rappresenta rispetto una qualsiasi base ha $\det \neq 0$.

4) Se β è non degenere $\Rightarrow$ $\dim X^{\perp} = \dim V - \dim \mathcal{L}(X)$

5) Se β è non degenere $\Rightarrow$ $X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)$.

DIM:

1) $\bar{a}, \bar{b} \in X^{\perp} \Rightarrow \beta(\bar{a}, \bar{x}) = 0 \ \forall \bar{x} \in X$

$\beta(\bar{b}, \bar{x}) = 0 \ \forall \bar{x} \in X$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\forall \gamma, \delta \in \mathbb{K}$,

$$\beta(\gamma \bar{a} + \delta \bar{b}, \bar{x}) =$$

$$= \gamma \beta(\bar{a}, \bar{x}) + \delta \beta(\bar{b}, \bar{x}) = 0 + 0 \ \forall \bar{x} \in X.$$

$\Rightarrow X^{\perp} \leq V$.

2) Se $X \subseteq X^{\perp\perp} \Rightarrow \mathcal{L}(X) \leq X^{\perp\perp}$ perché $X^{\perp\perp}$ è sottospazio. Dobbiamo dimostrare che $\forall \bar{x} \in X : \bar{x} \in X^{\perp\perp}$.

OSSERVIAMO CHE

$$X^{\perp} = \{ \bar{y} \in V \mid \beta(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \ \forall \bar{x} \in X \}.$$

$$X^{\perp\perp} = \{ \bar{z} \in V \mid \beta(\bar{z}, \bar{y}) = 0 \ \forall \bar{y} \in X^{\perp} \}.$$

ma in particolare se $\bar{z} = \bar{x} \in X$

abbiamo $\beta(\bar{z}, \bar{y}) = \beta(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

$\Rightarrow \bar{x} \in X^{\perp\perp}$.

3) Supponiamo di avere un vettore $\bar{v} \in Rad(\beta)$ e sia B la matrice che rappresenta β rispetto una base $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_n)$.

Allora $\forall \bar{x} \in V : \ \beta(\bar{x}, \bar{v}) = 0$

passando in componenti: vediamo che

in particolare $\beta(\bar{e}_i, \bar{v}) = 0 \ \forall i$

$$y = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ componenti di } \bar{v}$$

$$\underbrace{[0 \, 1 \ldots 0 \, 0]}_{\bar{e}_i} B \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = 0$$

ma questo prodotto è la componente i-esima del vettore By

$\Rightarrow$ il vettore By deve essere $\underline{0}$ $\Rightarrow y \in Ker(B)$.

D'altro canto $Ker(B) \neq \{\underline{0}\} \Leftrightarrow det(B) = 0$

Abbiamo dimostrato $\mathrm{rad}(B)$ corrisponde a $\mathrm{Ker}(B)$

[<u>N.B.</u> Se $\det(B) \neq 0 \Rightarrow B$ induce un isomorfismo ovvero il sistema lineare

$$B X = \underline{0}$$

è di Cramer

$$\Rightarrow \mathrm{Ker}(B) = \{\underline{0}\}.$$

viceversa: se $\det(B) = 0 \Rightarrow \mathrm{rk}(B) < n$

$$\Rightarrow \dim \mathrm{Ker}(B) = n - \mathrm{rk}(B) \geq 1 \,]$$

4), 5) prossima settimana.