$$\det \begin{bmatrix} a'_{11} & \\ a'_{21} & \\ \vdots & \\ a'_{n1} & \end{bmatrix} =$$

$$= a'_{11} \det \begin{bmatrix} a'_{11} \cdot a'^{-1}_{11} & \\ a'_{21} \cdot a'^{-1}_{21} & \\ \vdots & \end{bmatrix}$$

$$a \det \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} ax & y \\ az & t \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} x & ay \\ z & at \end{pmatrix} \neq \boxed{\det a \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}}$$

$$= \det \begin{pmatrix} ax & ay \\ az & at \end{pmatrix}$$

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$$

$f: V \to W$ è una appl. lineare

$$\ker f = \{ \bar{v} \in V : f(\bar{v}) = \underline{0}_W \} = f^{-1}(\underline{0})$$

Se $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ $\quad \ker(A) := \{ X \in \mathbb{K}^n \mid AX = \underline{0} \}$.

ker appl. lineare indotta da A

$\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

$\ker(f) \leq V$

$$\dim V = \underset{\substack{\parallel \\ \mathrm{null}(f)}}{\dim \ker f} + \underset{\mathrm{rk}(f)}{\dim \operatorname{Im} f}.$$

Matrice inversa

$A \in GL(n, \mathbb{K})$ = insieme matrici invertibili $n \times n$ con entrate in $\mathbb{K}$

$\Longleftrightarrow$

$\det A \neq 0$ (le colonne di A sono un sistema libero)

e in questo caso $A^{-1} = {}^{T}\!A^{a} \cdot \frac{1}{\det A}$ ↙ N.B.

ove $A^{a} = \left(\Gamma_{ij} \right)_{i,j=1}^{n}$ $\Gamma_{ij} := (-1)^{i+j} |A_{ij}|$

$\rightarrow n^2$ determinanti.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

ed A é invertibile $\Leftrightarrow$ le sue colonne sono una base di $\mathbb{K}^n$

→ in particolare i vettori della base canonica si scrivono come c. lineari delle colonne di A.

→ Sia A una matrice $m \times n$ e B una matrice $n \times n$. Allora il prodotto AB si può vedere come una serie di op. sulle colonne di A.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{c_1} & \boxed{c_2} & \boxed{c_3} & \cdots & \boxed{c_n} \end{bmatrix}}_{A} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}}_{B} = I - \bar{e}_{11} - \bar{e}_{22} + \bar{e}_{12} + \bar{e}_{21}$$

$$= \begin{bmatrix} \boxed{c_2} & \boxed{c_1} & \cdots \end{bmatrix}$$

In generale la matrice $\sigma_{ij} = I - \bar{e}_{ii} - \bar{e}_{jj} + \bar{e}_{ij} + \bar{e}_{ji}$

scambia le colonna i con la colonna j

$$A \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vartheta_\alpha = I + (\alpha - 1)\,\overline{e}_{11}$$

$\alpha \neq 0$

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

$$\mu_j := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ 1 & & & \\ 0 & & 1 & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} =$$

$$= I + e_{j1}$$

$$A \cdot \mu_j = \left[C_1 + C_j \quad C_2 \dots \quad C_n \right]$$

1) moltiplicare qualsiasi colonna per uno scalare α

$$\lambda_{j,\alpha} = \sigma_{1j} \, v_\alpha \, \sigma_{1j}$$

2) sommare ad ogni colonna multipli delle altre.

$$A \qquad\qquad\qquad\qquad I$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

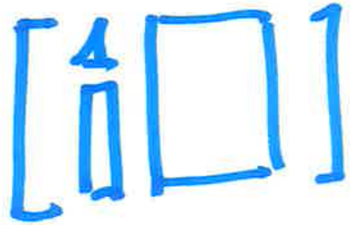
$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

seq. di op. che moltiplicate a sx per A $\rightarrow A^{-1}$ danno I

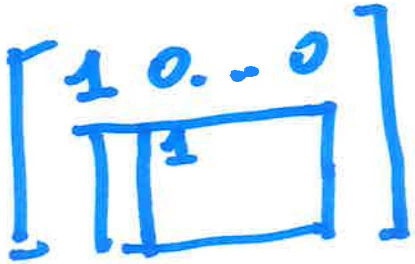
1) Se $a_{11} = 0 \Rightarrow$ cerchiamo nella prima riga la prima entrata non nulla a_{1j} e scambiamo la prima e j-esima colonna.

[se tale entrata non $\exists \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow A$ non invertibile]

2) dividiamo la prima colonna per a_{11}

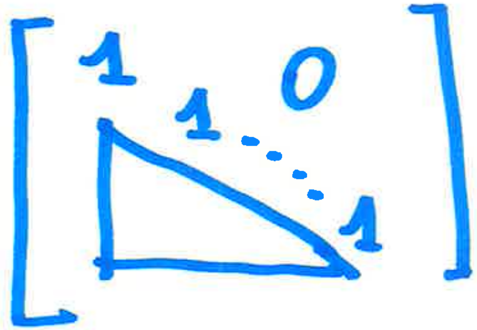


3) per ogni colonna j successiva alla prima sottraiamo ad essa $a_{1j} \cdot C_1$



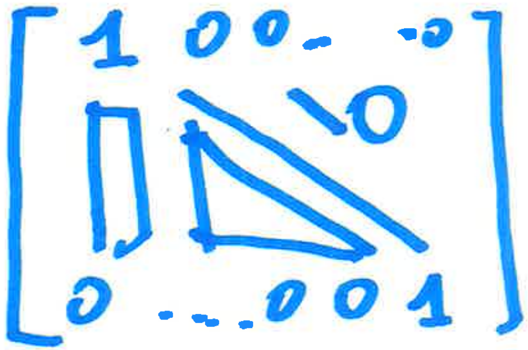
4) consideriamo il valore corrente di a_{11} e ragioniamo in modo analogo sulla matrice A_{11} ottenuta togliendo la I riga e I colonna ad A.

5) Arriviamo ad una matrice con la forma.

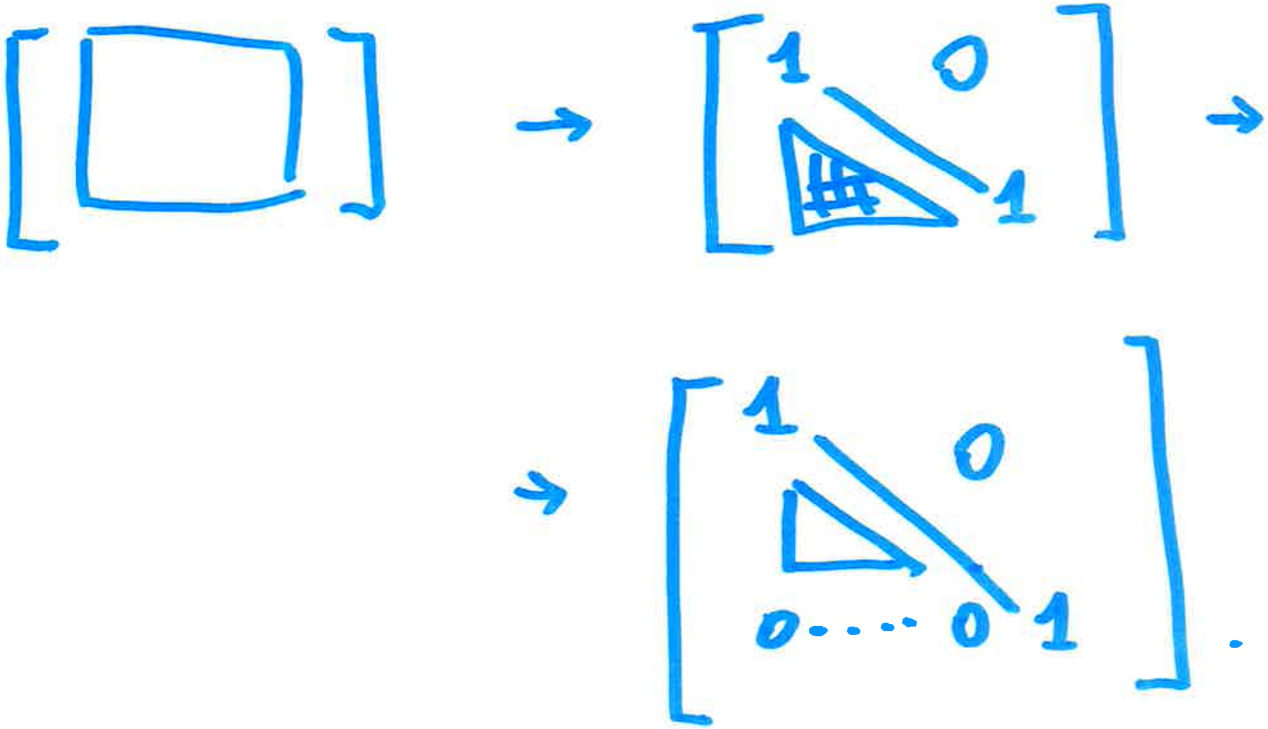


TRIANGOLARE INF.

6) partiamo dall'ultima colonna e $\forall\, j<n$ sottraiamo $a_{nj} C_n$



7) ragioniamo in modo analogo sulle matrici A_{nn} fino a che non arriviamo alla matrice identica.



N.B. Data una matrice $A \in \mathbb{k}^{m,n}$, moltiplicare A per una matrice $C \in \mathbb{k}^{m,m}$ come

$$A' = CA$$

corrisponde ad operare sulle <u>righe</u> di A.

→ la riduzione gaussiana per il calcolo dell'inv.
si può fare anche lavorando sulle righe
⇒ ALLA FINE SI OTTIENE LA STESSA MATRICE CHE RAGIONANDO PER COLONNE.

OSS: Sia G un gruppo $a \in G$ e $a^{-1} \in G$
tale che $a \cdot a^{-1} = 1 \Rightarrow a^{-1} \cdot a = 1$

$$a^{-1} = a^{-1} \cdot 1 = a^{-1} \cdot (a \cdot a^{-1}) = (a^{-1} \cdot a) \cdot a^{-1} = a^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{-1} \cdot a = 1$$

$\square$

Det: funzione definita per matrici quadrate
→ ci dice se le colonne sono una base.
→ ci dice anche se le righe sono una base.

$$\det(A) = \det({}^{T}A)$$

In particolare le colonne di A sono una base di $\mathbb{K}^{n,1}$ $\Leftrightarrow$ le righe di A sono una base di $\mathbb{K}^{1,n}$.

<u>Def</u>: Si dice rango di una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ la dimensione dello spazio vettoriale $\mathcal{C}(A) \leq \mathbb{K}^{m,1}$ generato dalle colonne di A.

<u>OSS</u>: $rk(A) = \dim \operatorname{Im}(f_A)$ ove $rk(A) = rk(f_A)$.

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^{n,1} \to \mathbb{K}^{m,1} \\ X \to AX \end{cases}$$

OSS 2: $rk(A) = rk({}^{T}A)$

cioé $rk(A) = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{R}(A)$

ove $\mathcal{C}(A)$ = sottospazio di $\mathbb{K}^{m,1}$ generato dalle colonne di A

$\mathcal{R}(A)$ = sottospazio di $\mathbb{K}^{1,n}$ generato dalle righe di A.

M matrice $\in \mathbb{K}^{m,n}$

$C \in \mathbb{K}^{m,m}$ $D \in \mathbb{K}^{n,n}$ se $\det(C) \neq 0$, $\det(D) \neq 0$

$\Rightarrow rk(M) = rk(CMD)$ ↳ fare cambiamenti di base.

$\overset{\shortparallel}{rk}(f_M)$

in particolare $rk(CM) = rk(MD)$

Sia C una matrice che effettua la rid. in forma di RREF per righe.
e D una matrice che effettua la rid. in forma di RREF per colonne.

CM risulta essere una matrice che contiene nelle righe una base di $\mathcal{R}(M)$ e tutti vettori nulli.

MD risulta una matrice che ha nelle colonne una base di $\mathcal{C}(M)$ e tutti vettori nulli.

$$\dim \mathcal{C}(M) = rk(MD) = \dim \mathcal{R}(M)$$

Il numero di vettori riga non nulli in CM è uguale al numero di vettori colonna non nulli in MD.

$$CM = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \cdots & 0 & & & \\ & & & 1 & \cdots & 1 & \\ & & & & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & & & \end{bmatrix}$$

$$MD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & \vdots & \\ \vdots & \alpha & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & 1 & \\ & \vdots & 0 & \\ 0 & \vdots & 0 & \end{bmatrix}$$

Teorema: Siano $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ dei vettori riga di $\mathbb{K}^n$

$\Rightarrow$ i vettori $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ sono linearmente indipendenti

$\Leftrightarrow$ la matrice che contiene le loro componenti per riga ha un minore $k \times k$ con $\det \neq 0$.

$$\bar{v}_1 = (v_{11} \dots v_{1n})$$
$$\bar{v}_2 = (v_{21} \dots v_{2n})$$
$$\vdots$$
$$v_k = (v_{k1} \dots v_{kn}).$$

$$M = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \\ v_{k1} & \cdots & v_{kn} \end{bmatrix} \; k$$

$$k$$

DIM: Se i vettori $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_K$ non sono liberi

$\Rightarrow$ uno di essi è c. lineare dei rimanenti

$\Rightarrow$ ogni sottomatrice di M $K \times K$

ha una riga che è c. lineare delle altre $\Rightarrow$ ha $\det = 0$.

Viceversa: supponiamo i $\bar{v}_i$ essere liberi

$\Rightarrow$ è possibile completare a base di $\mathbb{K}^n$

la sequenza $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_K)$ aggiungendo

opportuni vettori della base canonica

$\mathcal{E} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

$(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k \; \bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_{n-k}})$ base di $\mathbb{K}^n$

$\Rightarrow$ mettendo tutto a matrice abbiamo una matrice M' quadrata con $\det M' \neq 0$

$$M' = \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} v_{11} & \cdots & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ v_{k1} & \cdots & \cdots & v_{kn} \\ 0 & 0 \dots & 1 \; 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 \dots & 0 \; 0 \; 1 \dots & 0 \end{matrix}\right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} k \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n-k \end{array}$$

calcoliamo $\det M'$ con Laplace partendo dall'ultima riga.

$$M' = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & & v_{1n} \\ \vdots & & & \\ v_{k1} & \dots & & v_{kn} \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \ 0 \\ 0 & 0 & \dots 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det M' = \pm \det M'_{n, i_{n-k}} =$$

$$= \pm \det \left(M'_{n, i_{n-k}} \right)_{n-1, i_{n-k-1}} = \dots$$

otteniamo $\det M' = \pm \det S$ con

S minore $k \times k$ di M ottenuto cancellando le colonne $i_1, i_2 \dots i_{n-k}$

ma $\det M' \neq 0 \Rightarrow \det S \neq 0$.

$\square$

Esempio

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
1 & 2 & 0 & 1 & 5 & 3 & 3 & \bar{v}_1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{v}_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{v}_3 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & e_6
\end{array}
$$

Teorema (Kronecker): Una matrice $M \in \mathbb{k}^{m,n}$ ha rango k se e solamente se essa contiene un minore $k \times k$ con $\det \neq 0$ ed ogni minore quadrato più grande ha $\det = 0$.

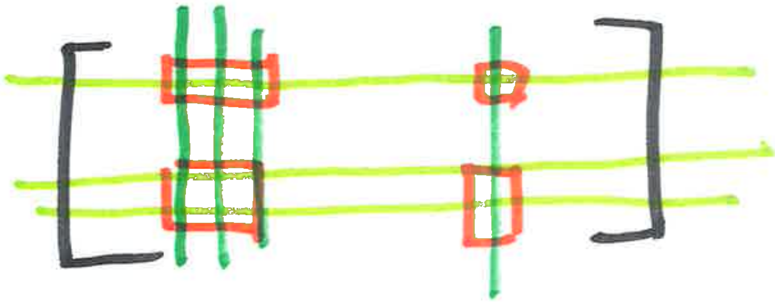
DIM: Supponiamo che $\dim \mathcal{R}(M) = \dim \mathcal{C}(M) = k$
$\Rightarrow$ ci sono in M k righe linearmente indipendenti $\Rightarrow$ se noi consideriamo la sottomatrice M' di M che contiene solo queste k righe, essa deve contenere un minore $k \times k$ con $\det \neq 0$ per quanto appena dimostrato $\Rightarrow$ in particolare l'ordine ρ del più grande minore quadrato con $\det \neq 0$ è $\rho \geq k$.

D'altro canto se fosse $\rho > k$ $\Rightarrow$ ci sarebbero in M almeno $k+1$ righe indipendenti $\Rightarrow \dim \mathcal{R}(M) > k$ ASSURDO $\Rightarrow \rho = k$ $\square$

→ Il rango di una matrice M è l'ordine massimo di un minore $k \times k$ contenuto in M con $\det \neq 0$.

<u>oss</u>: Data $M \in \mathbb{K}^{m,n}$ un minore $F \in \mathbb{K}^{k,k}$ di M con $\det F \neq 0$ e $k = rk(M)$ è detto <u>minore fondamentale</u> di M.

→ In particolare le righe di M intercettate da F sono una base di $\mathcal{R}(M)$ e le colonne intercettate da F sono una base di $\mathcal{C}(M)$.



$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$rk(M) \geq 3$$

$$\dim \mathcal{C}(M) = \dim \mathcal{R}(M) \leq 4$$

$$rk(M) = 3$$

Una base di $\mathcal{R}(M)$ è data da $\mathcal{B} = \big((1\ 0\ 1\ 0), (0\ 1\ 1\ 0), (0\ 0\ 0\ 1)\big)$

Una base di $\mathcal{C}(M)$ è data da $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$

Teorema (degli orlati). Sia $M \in \mathbb{k}^{m,n}$. Allora

$rk(M) = k$ se e solamente se

M contiene un minore non singolare F

(= con $\det \neq 0$) $k \times k$ ed ogni

minore di M $(k+1) \times (k+1)$ che contiene

F (= orlato di F) ha $\det = 0$.

DIM: Se $rk(M) = k \Rightarrow$ ogni minore $(k+1) \times (k+1)$

ha $\det = 0$ per il teorema di Kronecker.

In particolare i minori che contengono F.

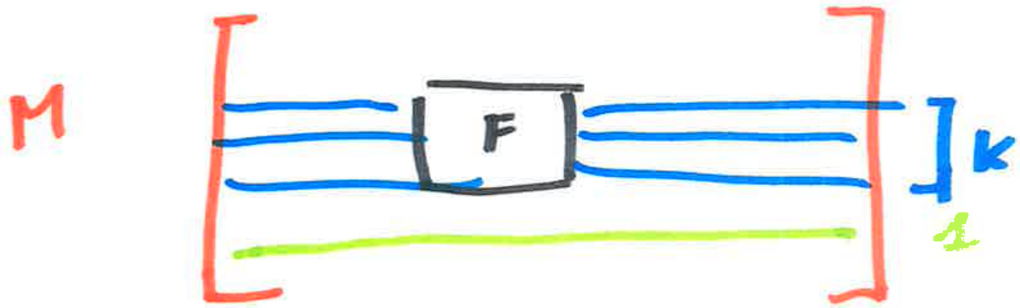
Supponiamo F minore $(k \times k)$ con $\det \neq 0$

e mostriamo che se $\dim \mathcal{R}(M) = \dim \mathcal{C}(M) > k$

allora esiste un orlato di F con $\det \neq 0$.

In particolare se ogni orlato di F ha $\det = 0$ $\Rightarrow$ la $\dim \mathcal{R}(M) = \dim \mathcal{C}(M) = k$]

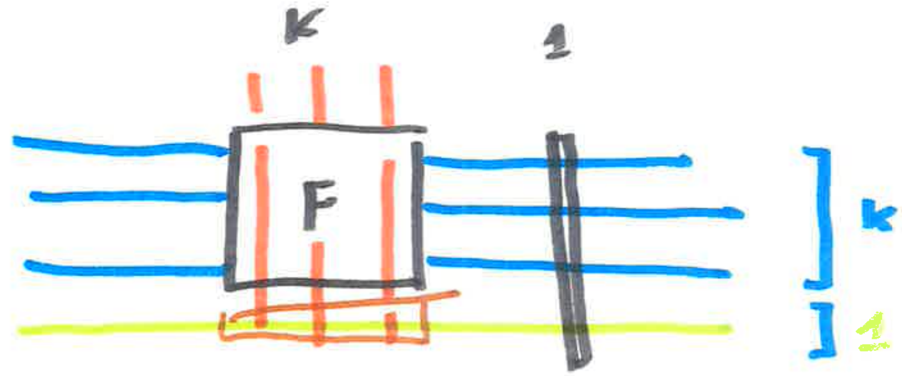
prendiamo le righe di M intercettate da F



poiché $\det F \neq 0$ queste righe sono un sistema libero.

$\Rightarrow$ se $\dim R(M) > k$ esiste almeno un'altra riga in M indipendente rispetto le k righe intercettate da F.

consideriamo la matrice M' formata da queste $k+1$ righe.

$M' =$ 

In M' ci sono $k+1$ righe indip $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim \mathcal{R}(M') = \dim \mathcal{C}(M') = k+1$$

poiché $\det(F) \neq 0$, le colonne di M' intercettate da F sono libere e $\dim \mathcal{C}(M') = k+1$

$\Rightarrow \exists$ una colonna in M' indipendente dalle colonne int. da F. $\Rightarrow$ AGGIUNGIAMOLA A QUESTE

osserviamo che adesso abbiamo un minore $(k+1)\times(k+1)$ di M' (e quindi anche di M) che contiene F ed ha det $\neq 0$ $\forall y$ $\Rightarrow$ deve essere

$\dim R(M) = \dim C(M) = k$ $\square$

Uso teorema orlati per calcolo rango (ma anche per trovare delle basi).

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$

tutte le entrate di A sono $= 0$? — sì $\rightarrow$ rk $= 0$ / no $\rightarrow$ rk > 0

trovare una entrata non nulla e considerare i suoi orlati

$\longrightarrow$ hanno tutti det $= 0$ — sì rk $= 1$ / no continua.

$k=2$

scegliamo un orlato con $\det \neq 0$ T

→ Se ogni orlato di T ha $\det = 0$ $\longrightarrow$ $rk = k$

altrimenti $rk = k+1$; $T \leftarrow$ orlato con $\det \neq 0$

$$
\begin{array}{ccccc}
\boxed{1} & 0 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 5 & 7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow
\end{array}
$$

$k=1$

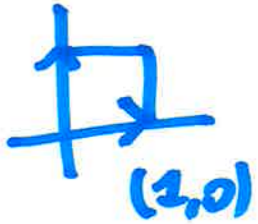
$k=2$

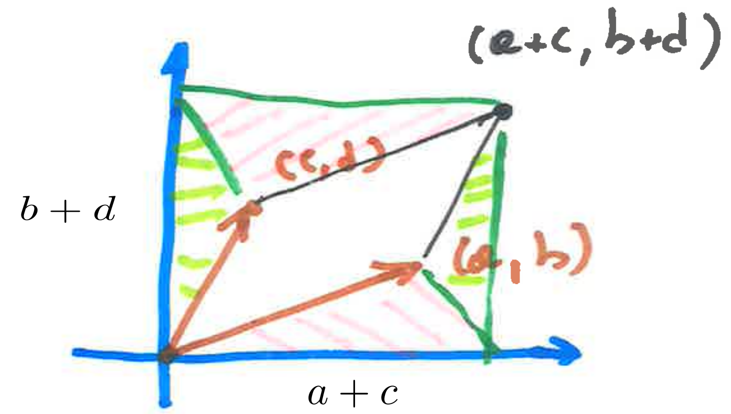
$k=3$

$k=4$

Teorema di Binet: Se $A, B \in \mathbb{K}^{n,n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$





$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$(a+c)(b+d) - (a+c)b - (b+d)c =$$

$$= \cancel{ab} + ad + \cancel{cb} + \cancel{cd} - \cancel{ab} - \cancel{bc} - bc - \cancel{dc} =$$

$$= ad - bc$$

Rango

- f: applicazione lineare

$$rk(f) = \dim \operatorname{Im}(f)$$

- M matrice $M \in \mathbb{K}^{m,n}$

$$rk(M) = \dim \mathcal{C}(M) =$$

= dimensione spazio vettoriale generato dalle colonne di M.

OSSERVAZIONE

$rk(M) = rk(f_M)$ ove

$$f_M : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m \\ X \longrightarrow MX \end{cases}$$

Teorema (Kronecker)

Il rango di una matrice $M \in \mathbb{K}^{m,n}$ eguaglia l'ordine massimo di un minore $F \in \mathbb{K}^{k,k}$ contenuto in M con $\det F \neq 0$.

CONSEGUENZA DIRETTA

$$rk(M) = rk({}^{T}M)$$

(visto che il minore di ordine massimo F corrisponde ad un minore di ordine massimo ${}^{T}F$ di ${}^{T}M$

Dimostrazione che

$rk(M) = rk({}^tM)$

con eliminazione di Gauss.

1) OSSERVIAMO CHE l'eliminazione di Gauss applicata alle righe corrisponde a moltiplicare una matrice $M \in \mathbb{K}^{m,n}$ per una matrice $C \in GL(m, \mathbb{K})$ a sinistra. La stessa applicata alle colonne corrisponde a moltiplicare per una matrice $B \in GL(n, \mathbb{K})$

a destra.

$$MB = \Big[\underbrace{c_1 \; \cdots \; c_k}_{k} \; \underbrace{\underline{0} \; \cdots \; \underline{0}}_{n-k}\Big]$$

In particolare

$$rk(M) = rk(MB) = k$$

= # colonne non nulle in MB.

$$CM = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} R_1 \\ \vdots \\ R_s \end{matrix}}\right\} s \\ \vphantom{0} \\ \vphantom{\vdots} \\ \vphantom{0} \end{matrix}$$

poiché CM rappresenta la stessa applicazione lineare di M (rispetto una base diversa)

$$\begin{array}{ccc} \dim \operatorname{Im}(f_{CM}) & = & \dim \operatorname{Im}(f_M) \\ \parallel & & \parallel \\ \operatorname{rk}(CM) & & \operatorname{rk}(M) \end{array}$$

Facciamo ora vedere che

$\dim \operatorname{Im}(f_{cM}) = s.$

(da questo segue $\dim R(M) = s = k$ ed abbiamo finito).

OSSERVIAMO A TAL FINE CHE

$$\operatorname{Im}(f_{cM}) \subseteq W$$

ove $W \leq \mathbb{K}^m$ di equazioni

$$x_{s+1} = 0 \quad x_{s+2} = 0 \quad \dots \quad x_m = 0$$

D'altro canto fra le colonne di

cm ci sono s vettori

della base canonica di W

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}(f_{cm}) = s$

$\Rightarrow s = k$

$\square$