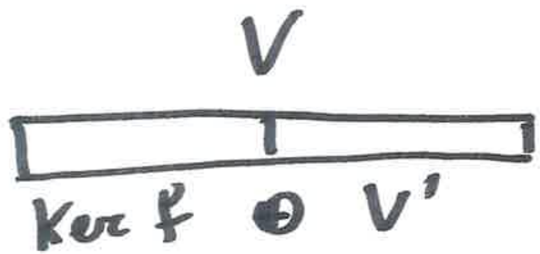
$f : V \to W$ lineare.

$rk(f) := \dim \operatorname{Im}(f)$

$null(f) := \dim \operatorname{Ker}(f)$

Teorema: $\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker}(f)$



$f : V' \to W$ isomorfismo

$\dim(V') = \dim W.$

DIM: 1) Se $\operatorname{ker} f = \{\underline{0}\} \Rightarrow f$ è iniettiva

f manda una base di V in una base di $\operatorname{Im} f$

$\Rightarrow \dim V = \dim \operatorname{Im} f =$

$= \dim \operatorname{Im} f + 0 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{ker} f.$

2) Sia $\ker f \neq \{\underline{0}\}$ ⇒ poniamo

$n = \dim V$

$k = \dim \ker f$

$\mathcal{B} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ base di $\ker f$

↓

seq. libera di vettori di V → possiamo completarla a base di V aggiungendo $n-k$ vettori

$$\mathcal{B}' = (\underbrace{\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k}_{\ker f}, \underbrace{\bar{e}_1 \dots \bar{e}_{n-k}}_{V'})$$

NOI SAPPIAMO CHE $\operatorname{Im} f$ è generata da

$$(f(\bar{v}_1), \dots f(\bar{v}_k), f(\bar{e}_1) \dots f(e_{n-k}))$$

ma $f(\bar{v}_1) = f(\bar{v}_2) = \dots f(\bar{v}_k) = \underline{0}$ ⇒ $\operatorname{Im} f$ è generata da

$$\bar{e}_1' = f(\bar{e}_1) \dots \quad \bar{e}'_{n-k} = f(\bar{e}_{n-k}).$$

DOBBIAMO FAR VEDERE CHE $\bar{e}_1' \dots \bar{e}'_{n-k}$ è LIBERA.

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = n-k$ perché è una base di $\operatorname{Im} f$.

Supponiamo $\alpha_1 \bar{e}_1' + \dots + \alpha_{n-k} \bar{e}'_{n-k} = \underline{0} \Rightarrow$

$$\alpha_1 f(\bar{e}_1) + \dots + \alpha_{n-k} f(\bar{e}_{n-k}) = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_{n-k} \bar{e}_{n-k}) = \underline{0}$$

DA cui $\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_{n-k} \bar{e}_{n-k} \in \operatorname{Ker} f$

~~se V~~ e quindi

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_{n-k} \bar{e}_{n-k} = \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_k \bar{v}_k$$

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_{n-k} \bar{e}_{n-k} - \beta_1 \bar{e}_1 - \dots - \beta_k \bar{e}_k = \underline{0}$$

D'ALTRO CANTO $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k\ \bar{e}_1 \dots \bar{e}_{n-k})$ è base di V

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-k} = \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$ $\square$

Rappresentazione di applicazioni lineari mediante matrici.

$f: V \to W$ lineare.

<u>OSS:</u> la funzione f dipende solo dai valori di $\bar{w}_i := f(\bar{e}_i)$ al variare di $\bar{e}_i$ in una base di V.

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ base di V $\Rightarrow$

$\forall \bar{v} \in V$: $\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$

$$f(\bar{v}) = f(\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n) = \alpha_1 f(\bar{e}_1) + \dots + \alpha_n f(\bar{e}_n) =$$

$$= \left[\, f(\bar e_1) \;\; f(\bar e_2) \cdots f(\bar e_n) \,\right] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

elementi di W

$\dim V = n$
$\dim W = m$

fisso una base $\mathcal{B}' = (\bar e_1' \dots \bar e_m')$ di W

$$f(\bar e_i) = a_{1i}\bar e_1' + a_{2i}\bar e_2' + \dots + a_{mi}\bar e_i'$$

$$[\bar e_1' \dots \bar e_m'] \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

osservo che le componenti del vettore

$f(\alpha_1\bar{e}_1 + \dots + \alpha_n\bar{e}_n)$ rispetto la base $\mathcal{B}'$ di W

sono date da $A\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix}$

$f: V \to W$ lineare

DATE una BASE $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ di V

$\mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$ di W

l'applicazione $\hat{f}: \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$

ove la matrice A contiene come colonne le componenti delle immagini dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto la base $\mathcal{B}'$

- è lineare
- manda le componenti di un vettore $\bar{v} \in V$ rispetto a $\mathcal{B}$ nelle componenti di $f(\bar{v})$ rispetto $\mathcal{B}'$.

es: 1

$$f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \alpha x \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha \neq 0 \Rightarrow$ isomorfismo di s. vett.

$\alpha = 0 \Rightarrow \ker f = \mathbb{R}$

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$$

1) $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^2$: $f(x,y) = \underline{0} \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

2) $\dim \operatorname{Ker} f = 1$; $\dim \operatorname{Im} f = 1$

le colonne di $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ devono essere non entrambe nulle ma linearmente dip.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $f(x,y) = (x+2y \ \ x+2y)$

3) $\dim \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$ e f è un isomorfismo.

N.B: Se V e W sono s.vettoriali e $f: V \to W$ lineare
f come funzione non dipende da basi di V o W.
ma la matrice che rappresenta f dipende dalle basi fissate!!

$A_f C y$

vettori di W rispetto a $\mathcal{B}'$ $\longleftarrow$ $\boxed{A_f}$ $\longleftarrow$ vettori di V rispetto a $\mathcal{B}$ $\quad X = C y$

$\downarrow$ cambiamento di base $\qquad\qquad$ $\uparrow$ cambiamento di base

$y' = D X'$

vettori di W rispetto $\mathcal{S}'$ $\qquad\qquad$ vettori di V rispetto ad $\mathcal{S}$ (altra base) $\quad y$

$D A_f C y$

$f: V \to V$ lineare si dice endomorfismo

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$
basi di V.
$\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$

ABBIAMO $\to$ A_f matrice di f rispetto la base $\mathcal{B}$.

VOGLIAMO $\to$ A'_f matrice di f rispetto la base $\mathcal{B}'$.

OSS: A_f e A'_f sono entrambe matrici quadrate.

rispetto $\mathcal{B}$ rispetto $\mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[d, "y' = C^{-1}y"'] & \boxed{A_f} \arrow[l] & X \arrow[l] \\
y' & & X' \arrow[u, "X = CX'"']
\end{tikzcd}$$

$y' = C^{-1}y$ camb. di base.

$X = CX'$

cambiamento di base

X' = componenti rispetto $\mathcal{B}'$

$$\boxed{A'_f = C^{-1} A_f C}$$

le matrici A_f e A'_f sono dette simili.

<u>Def</u>: Due matrici quadrate A e B sono dette <u>simili</u> se $\exists\, C \in GL(n, \mathbb{k})$: $A = C^{-1}BC$.

Siano $f: V \to W$ e $g: W \to U$

due applicazioni lineari.

Supponiamo $\dim W = m$, $\dim V = n$

$\dim U = k$

e che siano fissate basi opportune

tali che f è rappresentata da una matrice

B e g da una matrice A.

$\Rightarrow$ $B \in \mathbb{K}^{m,n}$ $A \in \mathbb{K}^{k,m}$

la funzione $(g \circ f)$ è rappresentata dalla matrice $AB \in \mathbb{K}^{k,n}$

#

pb Trovare una funzione che consenta di capire quando una matrice $n \times n$ è la matrice di un isomorfismo / è una matrice di cambiamento di base / è invertibile / è tale che le sue colonne sono un sistema libero di vettori di $\mathbb{K}^n$?

$\rightarrow$ determinante di una matrice.

vogliamo una funzione nelle colonne

0) $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$

1) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} = 1$

2) se ci sono 2 colonne uguali $\Rightarrow \det = 0$

3) det è multilineare, cioè se si fissano $(n-1)$ colonne, la funzione nelle colonne rimanente è lineare.

<u>Teorema</u>: 1) $\exists!$ funzione che soddisfa le proprietà date

2) $\det M \neq 0 \iff$ le colonne di M sono libere

DIM: Se ad una colonna sommiamo una c.lin. delle rimanenti $\Rightarrow$ det non cambia.

$$\det[C_1\ C_2 \dots C_n] \to$$

$$\det[C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n\ \ C_2 \dots C_n] =$$

$$= \det[C_1\ C_2 \dots C_n] + \alpha_2 \cancel{\det[C_2\ C_2 \dots C_n]} + \dots + \alpha_n \cancel{\det[C_n\ C_2 \dots C_n]} =$$

$$= \det[C_1\ C_2 \dots C_n]$$

$$0 = \det[\underline{0}\ C_2 \dots C_n] = \det[0 \cdot \underline{0}\ C_2 \dots C_n] = 0 \cdot \det \dots$$

$$\det[C_1\ C_2] = \det[C_1\ \ C_2 + C_1] =$$

$$= \det [c_1 - (c_2 + c_1) \quad c_2 + c_1] =$$

$$= \det [-c_2, \; c_2 + c_1] = \det [-c_2 \quad c_1] =$$

$$= -\det [c_2 \quad c_1].$$

Se abbiamo una seq. legata di colonne $\Rightarrow$ una di esse è c. lineare delle rimanenti $\Rightarrow$ sottraendo ad essa la c. lineare si ottiene che il det di partenza è uguale al det ottenuto da una matrice con una colonna di $\underline{0}$ $\Rightarrow$ è 0.

Supponiamo le colonne siano una seq. libera.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se $\forall i: a_{i1} = 0 \Rightarrow \det A = 0$

se no scambiamo la j esima riga con ~~j esima~~ e_i.

j minimo tale che $a_{j1} \neq 0$ con la prima riga.

Se $j = 1$ NESSUNA OP.

Se $j \neq 1$ il det cambia di segno

$$\det \begin{bmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & & \\ a'_{n1} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} =$$

$\neq 0$

$$= a'_{11} \det \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ a'_{21} a'^{-1}_{11} & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & & & \\ a'_{n1} a'^{-1}_{11} & & & \end{array} \right] =$$

ad ogni colonna dopo la prima sottraggo la prima moltiplicata per a_{1j}

$$= a'_{11} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \; 0 \dots 0 \\ \boxed{} & \underbrace{\boxed{c'_2 \; c'_3 \dots c'_n}}_{(n-1)} \end{bmatrix} (n-1) = ?$$

$$\alpha_1 \ldots \alpha_n \det \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} =$$

sottraggo di ogni colonna ≠ ultima l'ultima moltiplicata per a_{nj}

$$\alpha_1 \ldots \alpha_n \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ & \ddots & & 1 & \\ & & & 1 & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \ldots \alpha_n \det I =$$

$$= \alpha_1 \ldots \alpha_n .$$

Teorema di Laplace.

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n} \Rightarrow \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$

$|A_{ij}| = \det A_{ij}$

$\det(a_{11}) = a_{11}$.

Inoltre il det calcolato per righe e per colonne è uguale.

$$\det A = \det A^T$$

<u>N.B.</u> con Laplace servono $o(n!)$ operazioni con GAUSS ne servono $o(n^2)$.

II Teorema di Laplace

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ik}| = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j \\ \det A & \text{se } k = j \end{cases}$$

Stessa cosa per righe.

DIM: $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ik}$ con $k \neq j$ corrisponde al det di una matrice con la colonna j ripetuta (a meno del segno) in posizione k.

$\Rightarrow \; = 0.$

$j=1 \quad k=3$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} - a_{21} \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} +$$

$$+ a_{33} \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Matrice inversa.

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ poniamo $\forall\, 1 \le i,j \le n$ $\quad \Gamma_{ij} := (-1)^{i+j}|A_{ij}|$

$$A^a := \left(\Gamma_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$$

Teorema $B := A \cdot {}^T\!A^a = \det(A)\, I$

In particolare se ~~A~~ $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = {}^T\!A^a \cdot \dfrac{1}{\det A}$

l'entrata b_{ij} di B è proprio

$$(a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{in}) \begin{bmatrix} \Gamma_{j1} \\ \vdots \\ \Gamma_{jn} \end{bmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \det A & \text{se } i = j \end{cases} \quad \square$$