Lemma di Steinitz: Sia $V(\mathbb{K})$ s. vett. fin. generato.

Sia A seq. libera

B ~~seq~~ seq. di generatori di $V(\mathbb{K})$.

$\Rightarrow |A| \leq |B|$.

__DIM__: per assurdo supponendo $|A| > |B|$

$|A| = m$

$|B| = n$

$A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n \, \bar{a}_{n+1} \dots \bar{a}_m)$ $\quad m > n$

$B^{(0)} = B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ $\quad \mathcal{L}(B) = V$

$\bar{a}_1 \in V \Rightarrow \bar{a}_1 = \alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n$ con $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (0 0 \dots 0)$

perché una seq. libera non contiene $\underline{0}$

supponiamo WLOG (altrimenti si scambia l'ordine nei vettori di B) $\alpha_1 \neq 0$

$$\Rightarrow \bar{b}_1 = \alpha_1^{-1}(\bar{a}_1 - \alpha_2 \bar{b}_2 \dots - \alpha_n \bar{b}_n). \quad (*)$$

DEDUCIAMO CHE

$B^{(1)} = (\bar{a}_1 \, \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$ è di generatori per V

Sia $\bar{v} \in V \Rightarrow \exists \, (v_1 \dots v_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che

$\bar{v} = v_1 \bar{b}_1 + \dots + v_n \bar{b}_n$ perché $B^{(0)}$ di gen.

sostituiamo a $\bar{b}_1$ la scrittura $(*)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{v} = v_1(\alpha_1^{-1}(\bar{a}_1 - \alpha_2 \bar{b}_2 \dots - \alpha_n \bar{b}_n) + v_2 \bar{b}_2 + \dots + v_n \bar{b}_n \Rightarrow \bar{v} \in \mathcal{L}(B^{(1)})$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(B^{(1)}) = V.$$

$\bar{a}_2 \in A$ e $\bar{a}_2 \in V \Rightarrow \bar{a}_2 \in \mathcal{L}(B^{(1)})$

$\Rightarrow \exists\ \beta_1, \alpha'_2 \dots \alpha'_n : \quad \bar{a}_2 = \beta_1 \bar{a}_1 + \alpha'_2 \bar{b}_2 + \dots + \alpha'_n \bar{b}_n$

<u>OSS</u>: $(\alpha'_2, \dots \alpha'_n) \neq (0\,0 \dots 0)$ perché altrimenti $\bar{a}_1$ e $\bar{a}_2$ sarebbero proporzionali e quindi A non sarebbe libera.

WLOG $\alpha'_2 \neq 0 \Rightarrow \bar{b}_2 = \alpha_2'^{-1}(\bar{a}_2 - \beta_1 \bar{a}_1 - \alpha'_3 \bar{b}_3 \dots)$

e quindi come prima si verifica che

$B^{(2)} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2\ \bar{b}_3 \dots \bar{b}_n)$ è di generatori per V.

$\vdots$

continuando in questo modo arriviamo a

$B^{(n)} = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n)$ di generatori per V.

In A c'è ancora almeno un vettore che non compare in $\mathcal{B}^{(n)} \Rightarrow \bar{a}_{n+1} \in \mathcal{L}(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n)$

$\Rightarrow$ un vettore di A è comb. lineare dei rimanenti $\Rightarrow A$ è legata ↯ perché A è per ipotesi libera #

CONSEGUENZA:

Teorema di completamento della Base

Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno s. vettoriale finitamente generato di dimensione n e siano $A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k)$ una sua sequenza libera e $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una sua base fissata.

Allora è sempre possibile scegliere $n-k$ vettori in modo opportuno da $\mathcal{B}$ di modo tale che l'unione di A con l'insieme di questi vettori sia una base di $V_n(\mathbb{K})$.

__Es.__ $\mathbb{R}^4$

$$A = ((1100),(0100))$$

$$\mathcal{B} = ((1000),(0100),\underline{(0010)},\underline{(0001)})$$

$$\mathcal{B}' = ((\underline{111}0),(\underline{1111}),(1000),(1010))$$

__DIM__: Applicate lo stesso arg. di STEINITZ ma vi fermate quando avete finito i vettori di A. □

A seq. libera

$\mathcal{B}$ di generatori

spostate i k vettori di A nella seq. di generatori:

ALLA FINE OTTENETE

$$\mathcal{B}^{(k)} = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \dots \bar{a}_k\ \bar{b}_{i_1} \dots \bar{b}_{i_{n-k}})$$

I vettori da aggiungere ad A sono proprio quelli ~~in comune fra $\mathcal{B}^{(k)}$~~ rimasti in $\mathcal{B}^{(k)}$ partendo da $\mathcal{B}$. $\square$

Spazi vettoriali finitamente generati $V_n(\mathbb{K})$

$$\dim V = n < \infty$$

- Spazi vettoriali $V(\mathbb{K})$ $|V| = +\infty$
- Basi di V $\mathcal{B}$ $|\mathcal{B}| = n$
- dimensione di $V(\mathbb{K})$ $\dim V = n \in \mathbb{N}$

<u>oss</u> su $\dim(V)$.

1) Sia $V(\mathbb{K})$ s.vettoriale $W \leq V(\mathbb{K})$

$\Rightarrow \dim W \leq \dim V$

verifica: se fosse $\dim W > \dim V$ $\exists$ in V una seq. libera che ha più vettori di una base $\lightning$.

2) $W \leq V$: $\dim W = \dim V \Rightarrow W = V$

$\rightarrow$ una base di W ha n vettori liberi $\Rightarrow$ seq. di gen. per V $\Rightarrow$ è base di V.

3) $\forall i: \ 0 \le i \le \dim V \ \ \exists W \le V$ con $\dim W = i$.

→ prendiamo una base $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ di V e poniamo $W = \mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$.

N.B.: Se $\dim V = +\infty \Rightarrow$ (2) è falsa!

$\mathbb{R}[x]$ polinomi in x a coeff. reali.

$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, \dots)$

$W = \mathcal{L}(1, x^2, x^4, \dots)$ $\qquad W \neq \mathbb{R}[x]$

BASI: $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ è una base $\Leftrightarrow$ $\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{K}) \ \exists! (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ con $\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$.

<u>DIM</u>: 1) Se $\quad \bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n =$

$= \beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_n \bar{e}_n \Rightarrow \underline{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\bar{e}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\bar{e}_n$

e quindi $\alpha_1 = \beta_1 \dots \alpha_n = \beta_n$ perché una base è libera.

2) $\bar{v} \in \mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ perché una base è di generatori. $\square$

$\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B} = ((1\,0\,0), (0, -1, 0), (0\,0\,1))$

$\mathcal{B}' = ((1\,1\,1), (1\,1\,0), (1\,0\,0)).$

$(1, -2, 3)$

$(1\,2\,3) = 1 \cdot (1\,0\,0) + (-2) \cdot (0\,-1\,0) + 3 (0\,0\,1)$

$(1\,2\,3) = 3 \cdot (1\,1\,1) + 1 \cdot (1\,1\,0) + (-1)(1\,0\,0)$

$(3, -1, -1)$

Def: Si dice <u>base canonica</u> di $\mathbb{K}^n$ la base

$$\mathcal{B} = ((1\,0\,0\ldots0), (0\,1\,0\,0\ldots0), \ldots (0\,0\ldots0\,1))$$

~~in cui~~ rispetto a cui le componenti di ogni vettore di $\mathbb{K}^n$ coincidono col vettore stesso.

$$(a,b,c) = a(1\,0\,0) + b(0\,1\,0) + c(0\,0\,1)$$

$\Rightarrow$ vett. componenti $= (a,b,c)$ rispetto a $\mathcal{B}$.

$$\mathbb{R}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \to (a\,b\,c\,d)$$

??

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \to (a\,c\,d\,b)$$

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{ a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}.$$

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2) \quad \to \quad (a \ b \ c)$$

$$\mathcal{B}' = (x^2, x, 1) \quad \to \quad (c \ b \ a)$$

$$\mathcal{B}'' = (1, x^2, x) \quad \to \quad (a \ c \ b)$$

CAMBIAMENTO DI BASE

1) Le componenti di un vettore dipendono dalla base in cui si esprimono.
2) cosa lega le componenti rispetto a basi differenti?

[NOZIONE DI PRODOTTO RIGHE PER COLONNE].

$\mathbb{R}^2$

$$G = ((1\,1), (1\,0), (0\,1), (2,3))$$

$$(1\,1) = 1\cdot(1\,1) + 0\cdot \;\ldots\; =$$

$$= 0\cdot(1\,1) + 1\cdot(1\,0) + 1\cdot(0\,1) + 0\cdot(2\,3)$$

$$= 0\cdot(1\,1) \quad -1\cdot(1\,0) \quad -2\cdot(0\,1) \quad 1\cdot(2\,3)$$

$$= \ldots$$

$$\mathcal{B} = ((1\,1), (1\,0))$$

$$(1\,1) = 1\cdot(1\,1) + 0\cdot(1\,0)$$

$$V(\mathbb{K}) = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{ a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}.$$

$$(a + bx + cx^2) + (a' + b'x + c'x^2) =$$

$$= (a + a' + (b + b')x + (c + c')x^2).$$

$$\mathbb{R}^3 = \{ (a \ b \ c) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}.$$

$$(a \ b \ c) + (a' \ b' \ c') =$$

$$= (\underline{a + a'} \ \ b + b' \ \ c + c') \neq \underline{(a + a')} + (b + b')x + (c + c')x^2.$$

$A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k)$

$B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_k \dots \bar{b}_n)$

$A = ((111))$

$B = ((100), (010), (001))$

$(111) = 1 \cdot (100) + 1 \cdot \cancel{(010)} + 1 \cdot (001)$

$B' = ((100), (111), (001))$

$(100), (001)$

Prodotto righe per colonne.

Sia $\bar{v} \in \mathbb{K}^{1,n}$ $(v_1 \dots v_n)$ vettore riga $\langle \bar{v} |$

$\bar{w} \in \mathbb{K}^{n,1}$ $\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ vettore colonna $| \bar{w} \rangle$

Dato $\bar{v} \in \mathbb{K}^{1,n}$ definiamo ${}^T\bar{v}$ come il vettore di $\mathbb{K}^{n,1}$ ottenuto dando le medesime entrate ${}^T(v_1 \dots v_n) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$${}^T\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (v_1 \dots v_n)$$

$$^T\langle \bar v| = |\bar v\rangle$$

BRA KET

$$(v_1 \dots v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$$

$$\langle \bar v | \bar w \rangle = \sum_i v_i w_i$$

Supponiamo $\mathbb{K}^{m,n}$ = spazio vettoriale delle matrici $m \times n$
= tabelle di m righe ed n colonne.

con op. di spazio vettoriale definite componente per componente.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{i=1,\, j=1}^{m,n}$$

<u>OSS</u>: In $\mathbb{K}^{m,n}$ c'è una base standard

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right)$$

e rispetto questa base la matrice A ha componenti

$$(a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n}\ a_{21} \cdots a_{2n} \cdots \quad a_{mn})$$

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ $\quad B \in \mathbb{K}^{n,1}$

$\uparrow$ matrice $m \times n$ $\quad \uparrow$ vettore colonna

$\Rightarrow AB = C \in \mathbb{K}^{m,1}$ ove $c_{i1} = R_i \cdot B$

ove $R_i \in \mathbb{K}^{1,n}$ è la i-esima riga di A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \end{bmatrix}$$

$$A \in \mathbb{K}^{m,n} \quad , \quad B \in \mathbb{K}^{n,s}$$

$AB = C \in \mathbb{K}^{m,s}$ in cui

$$c_{ij} = \langle R_i^A \mid C_j^B \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$V_n(\mathbb{K})$ spazio vettoriale

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ $\qquad E = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix}$ $\qquad E' = \begin{pmatrix} \bar{e}_1' \\ \vdots \\ \bar{e}_n' \end{pmatrix}.$

$\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$

ogni el. di $\mathcal{B}'$ si scrive in componenti rispetto i vettori di $\mathcal{B}$.

$$(*) \quad \begin{aligned} \bar{e}_1' &= a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + \dots + a_{1n}\bar{e}_n = (a_{11} \dots a_{1n})E \\ \bar{e}_2' &= a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \dots + a_{2n}\bar{e}_n = (a_{21} \dots a_{2n})E \\ &\vdots \\ \bar{e}_n' &= a_{n1}\bar{e}_1 + a_{n2}\bar{e}_2 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n = (a_{n1} \dots a_{nn})E \end{aligned}$$

pongo $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ $\Rightarrow$ posso scrivere (*)

come (Δ) $\boxed{E' = AE}$ legame fra E ed E' in forma matriciale.

come si usa (Δ) per dedurre le componenti di un vettore rispetto a $\mathcal{B}$ dato rispetto a $\mathcal{B}'$?

Sia ~~$\bar{v} = x_1\bar{v}_1 + \ldots +$~~ $\bar{v}$ vettore di $V_n(\mathbb{K})$

$$\Rightarrow \bar{v} = (x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n) = (x_1 \ldots x_n)E$$
$$= (x_1'\bar{e}_1' + x_2'\bar{e}_2' + \ldots + x_n'\bar{e}_n') = (x_1' \ldots x_n')E'$$

pongo $X = (x_1 \ldots x_n)$
$X' = (x_1' \ldots x_n')$ $\Rightarrow$ $\bar{v} = \boxed{XE = X'E'}$

$E' = A\cancel{E} \qquad XE = X'E'$

X = componenti rispetto ad E

X' = componenti rispetto ad E'

$$E' = AE \Rightarrow \quad XE = X'E' = X'(AE) = (X'A)E$$

Ne segue che $XE = (X'A)E$ ed

X e $(X'A)$ sono le componenti del medesimo vettore $\bar{v}$ rispetto $\mathcal{B}$.

$$\Rightarrow \quad X = X'A$$

DI SOLITO $\quad {}^{T}A\,{}^{T}X' = {}^{T}X$

regola che lega le comp. di $\bar{v}$ rispetto $\mathcal{B}'$ con quelle rispetto a $\mathcal{B}$.

La matrice ${}^tA$ che ha per colonne ~~vettori~~ i vettori delle componenti di $\mathcal{B}'$ rispetto a $\mathcal{B}$ è detta matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

$$X' \longrightarrow \boxed{{}^tA} \longrightarrow X$$

comp. risp. $\mathcal{B}'$ — comp. rispetto a $\mathcal{B}$.

OSS / DEF:

Def 1) Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è detta invertibile se $\exists\, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che $A \cdot B = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

Def 2) L'insieme di tutte le matrici invertibili $n \times n$ è un gruppo non commutativo che è detto gruppo generale lineare e indicato con $GL(n, \mathbb{K})$.

OSS 3) Una matrice di cambiamento di base è sempre invertibile.

DIM OSS: Siano

$$E' = AE$$
$$E = A'E'$$

$$\Rightarrow E' = AE = AA'E' = IE'$$

$$E' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} E' = E'$$

$\square$

Applicazioni lineari $\rightarrow$ trasformazioni di spazi vettoriali "compatibili con la struttura".

Siano $V(\mathbb{K})$ e $W(\mathbb{K})$ due sp. vettoriali su $\mathbb{K}$.

Una funzione $f: V \rightarrow W$ è detta <u>lineare</u> (applicazione lineare) se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \bar{v}, \bar{w} \in V$

$$f(\alpha \bar{v} + \beta \bar{w}) = \alpha f(\bar{v}) + \beta f(\bar{w}).$$

f manda combinazioni lineari di vettori di V in combinazioni lineari di vettori di W con i medesimi coeff.

$$\begin{cases} f(\bar{v}+\bar{w}) = f(\bar{v}) + f(\bar{w}) \\ f(\alpha\bar{v}) = \alpha f(\bar{v}). \end{cases}$$

<u>OSS:</u> Se f è lineare $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\, f \leq W$

In particolare se f lineare e $\mathcal{U} \leq V \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\mathcal{U}) = \{\bar{w} \in W \mid \exists\, \bar{u} \in \mathcal{U} : f(\bar{u}) = \bar{w}\}. \leq W$

f manda sottospazi di V in sottospazi di W.

<u>DIM:</u> Siano $\bar{x}, \bar{y} \in \mathrm{Im}\, f \Rightarrow \exists\, \bar{u}, \bar{w} \in V : f(\bar{u}) = \bar{x}$, $f(\bar{w}) = \bar{y}$

$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad f(\alpha\bar{u} + \beta\bar{w}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{w}) =$

$= \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in \operatorname{Im} f$

perché $\alpha\bar{u} + \beta\bar{w}$ ovviamente è in V dato che V sp. vettoriale. $\square$

<u>Def</u>: Si dice rango di f la dimensione di $\operatorname{Im} f$.

$$\operatorname{rk}(f) := \dim \operatorname{Im}(f).$$

<u>OSS</u>: Se $\dim W = m < \infty \Rightarrow f$ è suriettiva $\iff \dim W = \operatorname{rk}(f)$.

$(\operatorname{Im} f = W \iff \dim \operatorname{Im} f = \dim W)$.

<u>OSS</u>: Sia $\mathcal{B}$ una base di V; $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f$ è generato da $(f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n))$.

In particolare $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim V$.

<u>Dim</u>: $\forall \bar{v} \in V \ \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{K} : \bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$

$$\Rightarrow f(\bar{v}) = f(\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n) = \alpha_1 f(\bar{e}_1) + \dots + \alpha_n f(\bar{e}_n)$$

$\square$

DOMANDA: QUANDO L'IMMAGINE DI UNA BASE DI V È UNA BASE DI W?

[equiv: quando f è iniettiva?]

<u>Def</u>: Sia $f: V \to W$ lineare

$$\operatorname{Ker} f := \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \underline{0} \}.$$

(nucleo di f / kernel di f).

Lemma 1: $\ker f \leq V$ è sottospazio di V.

DIM: ~~$\forall \bar{x}, \bar{y}$~~ $\underline{0} \in \ker f$ infatti

$$f(\underline{0}) = f(0 \cdot \underline{0}) = 0 \cdot f(\underline{0}) = \underline{0}$$

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \ker f \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}) =$$

$$= \alpha\underline{0} + \beta\underline{0} = \underline{0}$$

$\Rightarrow \ker f \ni \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$ $\square$

Def: Si dice nullità di f la dim di $\ker f$

$$\mathrm{Null}(f) := \dim \ker f.$$

Lemma 2: $f: V \to W$ è iniettiva $\Longleftrightarrow$ $\ker f = \{\underline{0}\}$.

__DIM:__ Se f iniettiva $\Rightarrow \exists! \bar{v} \in V : f(\bar{v}) = \underline{0} \Rightarrow$
$\Rightarrow \ker f = \{\underline{0}\}$ visto che $\underline{0} \in \ker f$.

Supponiamo ora $\ker f = \{\underline{0}\}$ e $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$ per $\bar{x}, \bar{y} \in V$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) - f(\bar{y}) = \underline{0}$$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{y}) = f(\bar{x} - \bar{y}) \Rightarrow \bar{x} - \bar{y} \in \ker f = \{\underline{0}\}.$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \qquad \square.$$

Proposizione: 1) Se $\ker f = \{\underline{0}\} \Rightarrow f$ manda sequenze libere di vettori di V in sequenze libere di vettori di W.

2) In particolare f manda una base di V in una base di $\mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow \ker f = \{\underline{0}\}$.

<u>DIM</u>: Supponiamo $\ker f = \{\underline{0}\}$ $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ seq. libera di V e per assurdo $(f(\bar{v}_1) \dots f(\bar{v}_k))$ legata. $\Rightarrow \exists\, \alpha_1 \dots \alpha_k$ tali che
$$\underset{\neq (0 0 \dots 0)}{\alpha_1 \dots \alpha_k}$$
$$\alpha_1 f(\bar{v}_1) + \dots + \alpha_k f(\bar{v}_k) = \underline{0}$$
$$\parallel$$
$$f(\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k) \Rightarrow \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k \in \ker f$$

$\Rightarrow \alpha_1\bar{v}_1 + \dots + \alpha_k\bar{v}_k = \underline{0}$ con non tutti gli α_i nulli ↯ perché $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ libera.

2) Se $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\} \Rightarrow f$ manda una Base di V = seq. libera di gen. in una seq. di generatori (✓) libera ($\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$) di $\operatorname{Im} f \Rightarrow$ base di $\operatorname{Im} f$.

Viceversa: supponiamo che f non mandi $\mathcal{B}$ in una base di Im. $\Rightarrow f$ manda $\mathcal{B}$ in una seq. legata di vettori di $\operatorname{Im} f$ $\Rightarrow \operatorname{Ker} f \neq \{\underline{0}\}$ □.

Teorema Nullità più Rango.

$f : V \to W$ lineare.

Allora $\boxed{\dim V = \mathrm{Null}(f) + \mathrm{rk}(f)}$

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f.$$

$\square$