A sì

B no: $\underline{0} \notin B$

C no: $\underline{0} \notin C$

D no: $(1000), (0100) \in D$ ma $(1100) \notin D$

E $= \{(0000)\}$. sì

F sì

G no $\underline{0} \notin G$

In generale

- l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni di I grado omogeneo (= termini noti $\forall$ 0) è sott. vettoriale.

•• l'insieme* delle soluzioni di eq. non omogenee NON è sott. vettoriale ($\underline{0} \notin X$)

∴ DI SOLITO L'INSIEME DELLE SOLUZIONI

⚠ DI UN SISTEMA DI EQ. NON DI PRIMO GRADO NON È SOTT. VETTORIALE

ATTENZIONE: CI SONO SISTEMI DI EQ. DI GRADO >1 CHE SONO EQUIVALENTI (= HANNO LE STESSE SOL) A SISTEMI LINEARI (= DI PRIMO GRADO).

$(x+y-z)^2=0$ $\qquad$ $x+y-z=0$

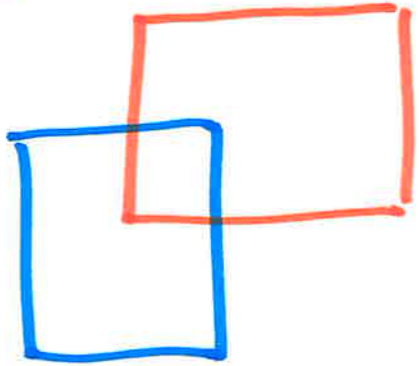
STESSE SOL.

$x^2+y^2=0 \longrightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$ su $\mathbb{R}$

COME COSTRUIRE SOTTOSPAZI

1) Siano $X, Y \leq V(\mathbb{K})$ sottospazi $\Rightarrow$

$\Rightarrow X \cap Y \leq V(\mathbb{K})$.



$X, Y \leq V(\mathbb{K}) \Rightarrow \underline{0} \in X,\ \underline{0} \in Y$

$\Rightarrow X \cap Y \neq \emptyset$

$\forall\, \bar{a}, \bar{b} \in X \cap Y\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in X$ perché $X \leq V$

$\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in Y$ " $Y \leq V$

$\Rightarrow \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in X \cap Y$

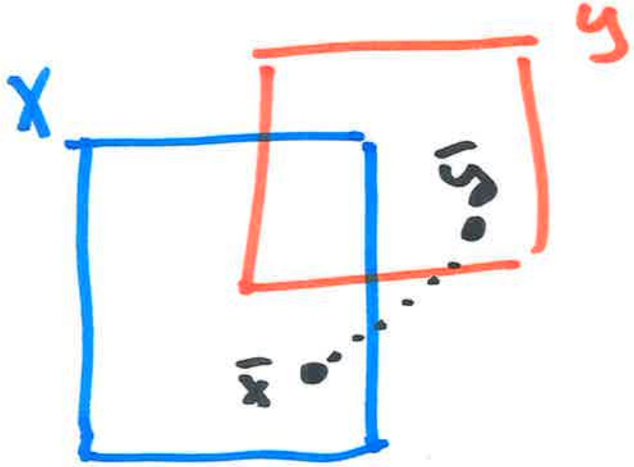
2) In generale $X \cup Y$ non è un sottospazio.

($X \cup Y$ è sott. $\Leftrightarrow X \subseteq Y$ oppure $Y \subseteq X$)

Infatti sia

$\bar{x} \in X \setminus Y$

$\bar{y} \in Y \setminus X$



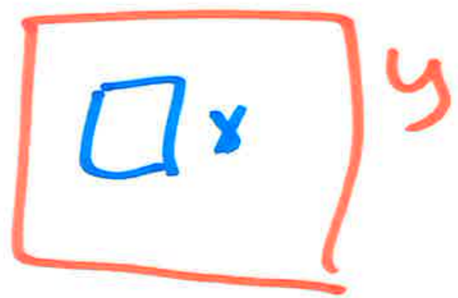
$\Rightarrow \bar{x}+\bar{y} \notin X$ perché se così fosse $(\bar{x}+\bar{y})-\bar{x} \in X \Rightarrow \bar{y} \in X$ ↯

$\bar{x}+\bar{y} \notin Y$ " " " " $(\bar{x}+\bar{y})-\bar{y} \in Y \Rightarrow \bar{x} \in Y$ ↯

$\Rightarrow \bar{x}+\bar{y} \notin X \cup Y$. $\square$

Se $X \subseteq Y \Rightarrow X \cup Y = Y$

$Y \subseteq X \Rightarrow X \cup Y = X$



Def: Siano $X, Y \leq V(\mathbb{K})$ definiamo

$$X + Y := \{ \bar{x} + \bar{y} \mid \bar{x} \in X, \bar{y} \in Y \}.$$

Teorema $X + Y \leq V(\mathbb{K})$ ed è il più piccolo sott. che contiene sia X che Y.

nel senso che $\forall Z \leq V(\mathbb{K}) : X \leq Z$ & $Y \leq Z$ si ha $X + Y \leq Z$.

DIM: 1) $X + Y \leq V(\mathbb{K})$

Siano $\left.\begin{array}{l} \bar{u} = \bar{x}_1 + \bar{y}_1 \\ \bar{w} = \bar{x}_2 + \bar{y}_2 \end{array}\right\} \in X + Y$

con $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in X$, $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in Y$

$$\Rightarrow \alpha \bar{u} + \beta \bar{w} = \alpha(\bar{x}_1 + \bar{y}_1) + \beta(\bar{x}_2 + \bar{y}_2) = (\alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2) + (\alpha \bar{y}_1 + \beta \bar{y}_2)$$

$$= \bar{x}_3 + \bar{y}_3 \in X + Y \text{ ove } \bar{x}_3 = \alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2 \in X$$

$\bar{y}_3 = \alpha \bar{y}_1 + \beta \bar{y}_2 \in \mathcal{Y}$.

2) Supponiamo $\mathcal{Z} \leq V(\mathbb{K})$ con $\mathcal{X} \leq \mathcal{Z}$ ed $\mathcal{Y} \leq \mathcal{Z}$.

$\Rightarrow$ in particolare $\forall \bar{x} \in \mathcal{X}\ \forall \bar{y} \in \mathcal{Y} : \bar{x} + \bar{y} \in \mathcal{Z}$

$\Rightarrow \mathcal{X} + \mathcal{Y} \leq \mathcal{Z}$ $\square$

Def: Siano $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \leq V(\mathbb{K})$. Si dice che la somma $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ è diretta e si scrive $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ se ogni vettore di $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ si scrive in modo unico come somma di un vettore di $\mathcal{X}$ e di uno di $\mathcal{Y}$.

$$\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \iff \forall \bar{z} \in \mathcal{X} + \mathcal{Y}\ \exists!\ \bar{x} \in \mathcal{X}, \bar{y} \in \mathcal{Y} : \bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$(\exists! (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : \bar{z} = \bar{x} + \bar{y})$$

Teorema: Siano $X, Y \leq V(\mathbb{K})$ allora

$$X \oplus Y \iff X \cap Y = \{\underline{0}\}.$$

DIM: Supponiamo $X \cap Y = \{\underline{0}\}$ e che $\exists\, \bar{s} \in X + Y$ tale che $\bar{s} = \bar{x}_1 + \bar{y}_1 = \bar{x}_2 + \bar{y}_2$ con $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in X$, $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in Y$.

$$\Rightarrow \bar{x}_1 + \bar{y}_1 = \bar{x}_2 + \bar{y}_2 \Rightarrow \underbrace{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}_{\in X} = \underbrace{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}_{\in Y}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 - \bar{x}_2,\ \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \in X \cap Y = \{\underline{0}\}.$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \text{ e } \bar{y}_1 = \bar{y}_2 \Rightarrow X \oplus Y \quad ✓$$

Supponiamo $X \oplus Y$ e sia $\bar{s} \in X \cap Y$

$\Rightarrow$ se fosse $\bar{s} \neq \underline{0}$ dato un vettore

$\bar{t} = \bar{x}_1 + \bar{y}_1 \in X + Y$ potremmo

scrivere $\bar{t} = \bar{t} + \bar{s} - \bar{s} =$

$$= \underbrace{(\bar{x}_1 + \bar{s})}_{\substack{\in X \\ \text{perché} \\ \bar{s} \in X}} + \underbrace{(\bar{y}_1 - \bar{s})}_{\substack{\in Y \\ \text{perché} \\ \bar{s} \in Y}}$$

ALLORA $\bar{t}$ si scriverebbe in 2 modi distinti come somma di vettori di X ed Y ↯

ne segue $\bar{s} = \underline{0}$ □

__N.B__: Due sottospazi $X, Y \subseteq V(\mathbb{K})$ hanno sempre in comune __almeno__ $\underline{0}$ $\Rightarrow$ la loro intersezione non è __mai__ vuota.

Se $X \cap Y = \{\underline{0}\}$ ovvero X e Y sono in somma diretta, si dice che la loro intersezione è __banale__.

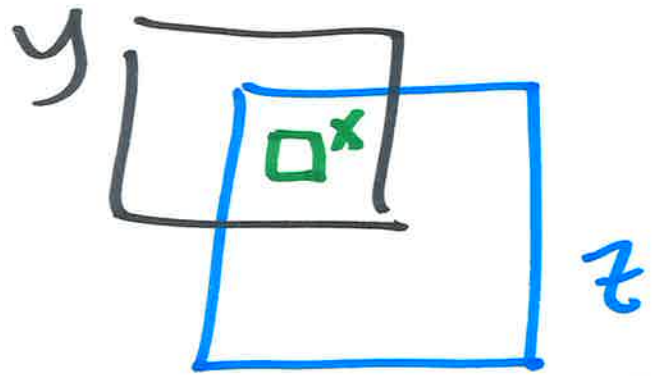
Sistemi liberi, legati e di generatori:

Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e sia $X \subseteq V$ sottoinsieme di V.

ci chiediamo quale sia il più piccolo sottospazio di V che contiene X (se esiste).

oss: 1) $V \leq V$ ed $X \subseteq V$. Quindi almeno un sott. di V che contiene X esiste. (è V stesso).

2) Siano Y, Z due sottospazi di V che entrambi contengono $X \Rightarrow Y \cap Z$ è un sottospazio di V che contiene X.



→ sicuramente (~~[illegible]~~) esiste un sottospazio "più piccolo" che contiene X.

Indichiamo tale sottospazio con il simbolo $\langle X \rangle$ oppure $\mathcal{L}(X)$.

"chiusura di X"

"copertura lineare di X"

$<$ minore

$\langle \dots \rangle$

Teorema: Sia $X \subseteq V(\mathbb{K})$.

Chiamiamo $\mathcal{L}(X) = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i \mid a_i \in \mathbb{K}, \bar{x}_i \in X, n \in \mathbb{N} \}$.

insieme di tutte le combinazioni lineari di un numero finito di elementi di X se $X \neq \emptyset$ ↲

$\mathcal{L}(\emptyset) = \{\underline{0}\}$.

ALLORA 1) $\mathcal{L}(X) \leq V(\mathbb{K})$

2) $\mathcal{L}(X)$ é il più piccolo sott. che contiene X.

$$\boxed{\mathcal{L}(X) = \langle X \rangle}$$

⚠ in $\mathcal{L}(X)$ compaiono c. lineari di un numero <u>finito</u> di el. di X anche se X è infinito.

DIM 1) ovviamente se $X \subseteq Z$ e $Z \leq V(\mathbb{K})$

ogni c. lineare di un numero finito di elementi di X deve essere in Z.

Quindi se $\mathcal{L}(X)$ è sottospazio $\Rightarrow$ è il più piccolo sottospazio che contiene X.

1) $\mathcal{L}(\emptyset) = \{\underline{0}\}$ che è sottospazio è anche il più piccolo sottospazio di V ✓

2) Supponiamo $\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i$ $\quad \bar{w} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \bar{x}_j'$

siano 2 vettori di $\mathcal{L}(X)$.

possiamo sempre supporre che i vettori che compaiono in $\bar{v}$ ed in $\bar{w}$ nelle sommatorie siano i medesimi (eventualmente con coeff $=0$) ed anche che il max su cui si somma nelle 2 espressioni sia lo stesso.

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \bar{x}_i \qquad \bar{w} = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \bar{x}_j$$

[$v = 2(1000) + 3(0010)$ $\qquad$ $w = 1(0100) + 5(1111)$

$\bar{v} = 2(1000) + 3(0010) + 0(0100) + 0(1111)$

$\bar{w} = 0(1000) + 0(0010) + 1(0100) + 5(1111)$]

verifichiamo le prop. di chiusura.

$\forall \gamma, \delta \in \mathbb{K}$

$$\gamma \bar{v} + \delta \bar{w} = \gamma \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \bar{x}_i + \delta \sum_{i=1}^{k} \beta_i \bar{x}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (\gamma \alpha_i \bar{x}_i + \delta \beta_i \bar{x}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (\gamma \alpha_i + \delta \beta_i) \bar{x}_i \in \mathcal{L}(X)$$

$\square$

<u>Def</u>: Sia $W \leq V(\mathbb{K})$ ed $X \subseteq W$. Si dice che X é un <u>insieme di generatori</u> per W se

$X = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}.$

$$\bar{x} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$$

$$\downarrow$$

$$2\bar{a} + 3\bar{b} + 0\bar{c} + 0\bar{d}$$

$$\bar{y} = 3\bar{c} + 5\bar{d}$$

$$\downarrow$$

$$0\bar{a} + 0\bar{b} + 3\bar{c} + 5\bar{d}$$

$\mathcal{L}(X) = W.$

W è detto <u>finitamente generato</u> se $\exists X \subseteq W$, $|X| < \infty$ tale che

$$\mathcal{L}(X) = W.$$

In generale $\quad X \subseteq \mathcal{L}(X)$

se $X \leq V(\mathbb{K}) \iff X = \mathcal{L}(X)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}(X)) = \mathcal{L}(X)$$

$\mathbb{R}^3$ $\qquad\qquad |\mathbb{R}^3| = \infty$

$X = ((1\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,0\,1), (1\,1\,1))$

$\mathcal{L}(X) = \mathbb{R}^3$

$Y = ((1\,0\,0), (0\,1\,0), (1\,1\,1))$

$\mathcal{L}(Y) = \mathbb{R}^3$

<u>OSS</u>: Sia X un insieme/sequenza di generatori per $V(\mathbb{K}) \Rightarrow \forall Y : X \subseteq Y \subseteq V$, Y è pure insieme/sequenza di generatori per $V(\mathbb{K})$.

"Ingrandire" un insieme di generatori è facile.

Se X insieme/seq. di generatori di $V(\mathbb{K})$

$Z \subseteq X \Rightarrow \mathcal{L}(Z) \subseteq \mathcal{L}(X)$

ma non è detto $\mathcal{L}(Z) = \mathcal{L}(X)$

Esempio $X = ((1\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,0\,1))$

$\mathcal{L}(X) = \mathbb{R}^3$

$Z = ((1\,0\,0), (0\,1\,0))$

$\mathcal{L}(Z) = \{\alpha(1\,0\,0) + \beta(0\,1\,0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^3$

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e

$\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_r)$ una sequenza di vettori di $V(\mathbb{K})$. Allora la sequenza $\mathcal{S}$ è detta libera se l'unica comb. lineare dei suoi vettori che dà $\underline{0}$ è quella con coeff. tutti 0.

In tale caso i vettori sono detti linearmente indipendenti (o liberi).

$\mathcal{S}$ è detta legata (ed i suoi vettori linearmente dipendenti) se non è libera

S **libera** se

$$\alpha_1\overline{v}_1+\alpha_2\overline{v}_2+\dots+\alpha_t\overline{v}_t=\underline{0} \Rightarrow (\alpha_1\dots\alpha_t)=(0\,0\dots0).$$

S **legata** se

$$\exists\,(\alpha_1\dots\alpha_t)\neq(0\,0\dots0):\ \alpha_1\overline{v}_1+\dots+\alpha_t\overline{v}_t=\underline{0}.$$

OSS: S è legata se e solo se almeno uno dei suoi elementi è combinazione lineare dei rimanenti.

DIM:
Supponiamo S legata $\Rightarrow \exists\,(\alpha_1\dots\alpha_t)\neq\underline{0}$
tali che $\alpha_1\overline{v}_1+\dots+\alpha_t\overline{v}_t=\underline{0}$
WLOG $\alpha_1\neq0 \Rightarrow \alpha_1\overline{v}_1=-\alpha_2\overline{v}_2-\dots-\alpha_t\overline{v}_t$

e poiché $\alpha_1 \neq 0$ $\exists \alpha_1^{-1} \in \mathbb{K}$ e quindi

$$\bar{v}_1 = \alpha_1^{-1}(\alpha_1 \bar{v}_1) = \alpha_1^{-1}(-\alpha_2 \bar{v}_2 \dots - \alpha_t \bar{v}_t)$$

$\Rightarrow$ $\bar{v}_1$ è c. lineare degli altri vettori.

Viceversa: sia $\bar{v}_1 = \beta_2 \bar{v}_2 + \dots + \beta_t \bar{v}_t$

$$\Rightarrow \quad \bar{v}_1 - \beta_2 \bar{v}_2 - \dots - \beta_t \bar{v}_t = \underline{0}$$

è una c. lineare a coeff. non tutti 0 che dà $\underline{0}$. $\Rightarrow$ S legata. $\square$

CONSEGUENZA: 1) Se $\underline{0} \in S \Rightarrow S$ è legata.

2) Se in S ci sono 2 vettori uguali $\Rightarrow S$ è legata

$$\bar{v}_i - \bar{v}_j = \underline{0}$$

3) Se in S ci sono 2 vettori proporzionali $\Rightarrow S$ è legata.

$(\underline{0}, (1\,0\,0), (0\,2\,0))$ legata.

$$\underline{0} = 1 \cdot \underline{0} + 0 \cdot (1\,0\,0) + 0 \cdot (0\,2\,0)$$

$((1\,0\,0), (0,2\,0), (1\,0\,0))$ legata

$$\underline{0} = 1 \cdot (1\,0\,0) + 0 \cdot (0\,2\,0) - 1\,(1\,0\,0)$$

$((1\,0\,0), (2\,0\,0), (0\,1\,0))$ legata

$$\underline{0} = 2\,(1\,0\,0) - 1\,(2\,0\,0) + 0\,(0\,1\,0).$$

OSS: Se S sequenza libera e $\mathcal{T} \subseteq S$, $\mathcal{T} \neq \emptyset$ $\Rightarrow \mathcal{T}$ libera.

DIM: Se fosse $\mathcal{T}$ legata $\Rightarrow \exists$ c. lineare dei vettori di $\mathcal{T}$ a coeff. non tutti 0 che dà $\underline{0}$. Estendiamo tale c. lineare a c. lineare dei vettori di S aggiungendo gli elementi di $S \setminus \mathcal{T}$ moltiplicati per 0 $\Rightarrow S$ legata ↯ $\square$

Teorema: Sia $X \subseteq V(\mathbb{K})$ una sequenza di generatori per $V(\mathbb{K})$.
Se X è legata allora $\exists \bar{x} \in X$ tale che $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{\bar{x}\})$.

[METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI]

<u>DIM</u>: $X = \emptyset \Rightarrow$ nulla da dimostrare.

Se $X = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ legata $\Rightarrow$ esiste un vettore $\bar{v}_i \in X$ tale che

$$\bar{v}_i = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \bar{v}_{i-1} + \alpha_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$$

$\bar{v}_i$ c. lineare dei rimanenti.

ASSERISCO CHE $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{\bar{v}_i\})$.

→ CHIARAMENTE $\mathcal{L}(X \setminus \{\bar{v}_i\}) \subseteq \mathcal{L}(X)$.

Sia ora $\bar{y} = \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_i \bar{v}_i + \dots + \beta_n \bar{v}_n \in \mathcal{L}(X)$

$$\bar{y} = \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_i (\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n) + \dots + \beta_n \bar{v}_n$$

$\bar{y}$ é scritto come c. lineare di vettori di X in cui non compare piú $\bar{v}_i$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{y} \in \mathcal{L}(X \setminus \{\bar{v}_i\}) \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(X \setminus \{\bar{v}_i\})$$

DA cui

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{\bar{v}_i\}) \quad \square$$

ALGORITMO SCARTI SUCCESSIVI :

↓

DATA UNA SEQ. DI GEN FINITA RESTITUISCE ϕ OPPURE UNA SEQ. LIBERA DI GENERATORI.

X seq. di generatori

$X = \phi$? $\xrightarrow{\text{sí}}$ rest. X FINE

X libera $\xrightarrow{\text{sí}}$ rest. X FINE

X legata $\Rightarrow$ troviamo $\bar{v}_i \in X$ c. lineare dei rimanenti

poniamo $X \leftarrow X \setminus \{\bar{v}_i\}$

__Def__: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Si dice __BASE__ di $V(\mathbb{K})$ ogni sua sequenza libera di generatori.

⚠ La definizione data è chiamata su alcuni testi: <u>base ordinata</u>. Gli altri testi definiscono come base un <u>insieme</u> libero di generatori.

$$\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\} = \{\bar{b},\bar{a},\bar{c}\}.$$

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) \neq (\bar{b},\bar{a},\bar{c})$$

Teorema: Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale fin. generato e sia $\mathcal{B}$ una sua qualsiasi base ordinata

$\mathcal{B} = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$

Allora per ogni vettore $\bar{v} \in V(\mathbb{K})$ esiste una ed una sola c. lineare degli elementi di $\mathcal{B}$ che dà $\bar{v}$.

Viceversa: se $\forall \bar{v} \in V \ \exists!$ c. lineare degli elementi di $\mathcal{B}$ che dà $\bar{v} \Rightarrow \mathcal{B}$ è una base di $V(\mathbb{K})$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{B} = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n) \text{ base ordinata} \iff \forall \bar{v} \in V(\mathbb{K})\ \exists! (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \\ \qquad \bar{v} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n . \end{array}\right]$$

<u>DIM:</u> $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ di generatori cioè $V = \mathcal{L}(\mathcal{B})$

$\Rightarrow \forall \bar{v} \in V\ \exists\ (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \bar{v} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n$

se ci fosse anche $(\beta_1 \dots \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ con

$(\beta_1 \dots \beta_n) \neq (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ e $\bar{v} = \beta_1 \bar{b}_1 + \dots + \beta_n \bar{b}_n$

$\Rightarrow \underline{0} = \bar{v} - \bar{v} = (\alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n) - (\beta_1 \bar{b}_1 + \dots + \beta_n \bar{b}_n)$

$= (\alpha_1 - \beta_1) \bar{b}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \bar{b}_n$

con almeno un $\alpha_i - \beta_i \neq 0$ ↯ perché $\mathcal{B}$ libera.

$\forall \bar{v} \in V(\mathbb{K}) \; \exists! (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \bar{v} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n$.

prendiamo $\bar{v} = \underline{0} \Rightarrow (0\,0 \dots 0) = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ è l'unico modo per scriverlo $\Rightarrow \mathcal{B}$ è libera!

Inoltre per ipotesi $\forall \bar{v} \in V(\mathbb{K})$ è c. lineare dei vettori di $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ di generatori

$\Rightarrow \mathcal{B}$ base. $\square$

In $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{B} = ((1\,0), (0\,1))$ — in componenti:

$(3,5) = 3 \cdot (1\,0) + 5 \cdot (0\,1) \rightarrow (3,5)$

$\mathcal{B}' = ((0\,1), (1\,0))$

$(3,5) = 5 \cdot (0\,1) + 3 (1\,0) \longrightarrow (5,3)$

Lemma di Steinitz: Sia $V(\mathbb{K})$ uno s. vett. finitamente generato ~~[illegible]~~

A una sua seq. libera di vett.

B una sua seq. di generatori.

ALLORA

$$\boxed{|A| \leq |B|}.$$

Una seq. libera ha al più tanti vettori quanti una seq. di generatori.

1) Se A libera $\Rightarrow$ $|A| \leq \min\{|B| \mid B \text{ di generatori}\}$.

Se B di generatori $\Rightarrow$ $|B| \geq \max\{|A| \mid A \text{ libera}\}$.

2) Se A e B sono entrambe basi di $V(\mathbb{K})$ $\Rightarrow |A| = |B|$. OGNI 2 BASI DI $V(\mathbb{K})$ HANNO LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI.

<u>DIM</u>:

A	B	
libera	gen.	$\|A\| \leq \|B\|$
gen.	libera	$\|A\| \geq \|B\|$

$\Rightarrow |A| = |B|$ $\square$

<u>Def</u>: Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$.

Se $V(\mathbb{K}) = \{0\}$ si dice $\dim V(\mathbb{K}) = 0$ <u>DIMENSIONE</u>

Se $V(\mathbb{K}) \neq \{0\}$ si dice $\dim V(\mathbb{K}) = n$

ove $n = |B|$ con B base di $V(\mathbb{K})$.

3) Sia A una seq. di generatori in uno s. vettoriale di $\dim = n$ $\Rightarrow$ A è libera.

4) Sia B una seq. libera di n vettori in uno s. vett. di $\dim = n$ $\Rightarrow$ B è di generatori.

DIM 3) Se A fosse legata, per gli scarti succ. si trova $A' = A \setminus \{\bar{v}\}$ con $|A'| = |A| - 1$ di generatori. Ma V ha dim. n $\Rightarrow$ $\exists$ in V una seq. libera di n vettori ed una seq. di $(n-1) = |A| - 1$ generatori $\Rightarrow$ ↯ ASSURDO $\Rightarrow$ A libera.

4) Se B non fosse di generatori $\Rightarrow$ $\exists\, \bar{v} \in V \setminus \mathcal{L}(B)$ $\Rightarrow$ $B \cup \{\bar{v}\}$ è libera perché

posto $B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ e supposto

$$\alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n + \beta \bar{v} = \underline{0}$$

deve necessariamente essere $\beta = 0$ perché altrimenti $-\beta \bar{v} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n$

$$\Rightarrow \bar{v} = -\beta^{-1}(\alpha_1 \bar{b}_1 \dots \quad).$$

e $\bar{v} \in \mathcal{L}(B)$ ↯

MA A QUESTO PUNTO da B libera scende $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \Rightarrow B \cup \{\bar{v}\}$ libera e $|B \cup \{\bar{v}\}| = n+1$.

D'altro canto $\exists$ in V una base con n vettori e quindi n generatori ↯ NE SEGUE

B di generatori $\square$.

5) Una seq. di generatori <u>minimale</u> (cioè tale che ogni sua sottoseq. non genera più) è una base.

6) Una seq. libera <u>massimale</u> (cioè tale che non è contenuta in alcuna seq. libera più grande) è una base.

<u>OSS</u>: Ogni sp. vettoriale $V(\mathbb{K})$ non banale ($V(\mathbb{K}) \neq \{\underline{0}\}$) AMMETTE BASI.

- Se $V(\mathbb{K})$ finitamente generato: prendere X con $|X| < \infty$ di generatori e applicare gli scarti successivi
- Se $V(\mathbb{K})$ non f.g. $\rightarrow$ equiv. ad assioma della scelta.

$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$.

$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, \dots x^n, \dots)$

$\mathbb{R}$ come s. vettoriale su $\mathbb{Q}$.

A libera $|A| = m$

B generatori $|B| = n$

DIM di Steinitz: per assurdo

$|A| > |B|$

$$A = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n\ \bar{a}_{n+1} \dots \bar{a}_m)$$

$$B = (\bar{b}_1\ \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$$

Si possono sostituire ad uno ad uno i vett. di B con vettori di A mantenendo la prop. di generare V

$A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n \bar{a}_{n+1} \dots \bar{a}_m)$

$B = (b_1 \dots b_n)$

$B^1 = (\bar{a}_1 \, \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$

$B^2 = (\bar{a}_1 \, \bar{a}_2 \, \bar{b}_3 \dots \bar{b}_n)$

$\vdots$

$B^n = (\bar{a}_1 \, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n)$

DI GEN.

osserviamo che $\bar{a}_{n+1} \in \mathcal{L}(B^n)$

quindi in A c'è un vettore che è c. lineare dei rimanenti $\Rightarrow$ A legata

$\bar{a}_1 = \alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n \qquad \alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \bar{b}_1 = \alpha_1^{-1} (\bar{a}_1 - K_1 \dots$ □