Campo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$

- $(\mathbb{K}, +)$ gruppo commutativo
- $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ gruppo commutativo
- $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ $a(b+c) = ab + ac$

$$(a+b)c = ac + bc.$$

$\rightarrow$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Oss. 1: Un campo è l'ambiente in cui possiamo studiare l'eq.

$$ax + b = 0$$

se $a = b = 0 \Rightarrow 0 \cdot x + 0 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}$

se $a = 0, b \neq 0 \Rightarrow 0 \cdot x + b = 0 \quad \nexists x \in \mathbb{K}$

se $a \neq 0 \Rightarrow \boxed{ax + b = 0}$

$$ax = -b$$

$\exists a^{-1} \in \mathbb{K}$: $\quad a^{-1}ax = a^{-1}(-b)$

$$x = a^{-1}(-b) \quad \exists! x \in \mathbb{K}.$$

$ax = b$ 1 operazione

$ax + b = 0$ 2 operazioni.

<u>N.B</u>: in un campo il prodotto $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$
ma $(\mathbb{K}, \cdot)$ NON È UN GRUPPO!

$(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ È UN GRUPPO.

<u>OSS</u>: Sia $\mathbb{K}$ un campo $\Rightarrow$ $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oppure $b = 0$

vale la "legge di annullamento del prodotto"

$\rightarrow$ in particolare $\forall a \in \mathbb{K}$: $a \cdot 0 = 0$

<u>DIM</u>: Sia $a \in \mathbb{K} \Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot (0+0) =$

$= a \cdot 0 + a \cdot 0$

sottraendo a dx e sx $(a \cdot 0)$

cioè sommando a dx e sx $-(a \cdot 0)$

otteniamo

$0 = -(a \cdot 0) + a \cdot 0 = -(a \cdot 0) + (a \cdot 0) + (a \cdot 0) =$

$= a \cdot 0 = 0 \cdot a$

supponiamo ora $a \cdot b = 0$

se $b = 0 \Rightarrow$ FINE.

se $b \neq 0 \Rightarrow \exists\, b^{-1} \in \mathbb{K}$ tale che

$$b \cdot b^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow 0 = a \cdot b \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ 0}}{0 \cdot b^{-1}} = a(b \cdot b^{-1}) = a \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = 0$ $\square$ <u>FINE</u>

In un campo <u>NON CI SONO DIVISORI DELLO ZERO</u>!

ove per divisore dello zero si intende un $a \in \mathbb{K}$ tale che $\exists\, b \in \mathbb{K}$ con $b \neq 0$ e $a \cdot b = 0$.
$a \neq 0$

Esempi

$(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ $\quad \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}.$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

XOR

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

AND

0 = pari

1 = dispari

$\mathbb{Z}_2 \setminus \{0\} = \{1\}.$

0 = FALSO

1 = VERO

$a \cdot (b+c) = ab + ac$

a	b	c	b+c	a(b+c)	ab+ac
0	0	0	0	0	0 + 0
0	0	1	1	0	0 + 0
0	1	0	1	0	0 + 0
0	1	1	0	0	0 + 0
1	0	0	0	0	0 + 0
1	0	1	1	1	0 + 1
1	1	0	1	1	1 + 0
1	1	1	0	0	1 + 1 = 0

+	F	V
F	F	V
V	V	F

·	F	V
F	F	F
V	F	V

$\underbrace{a \text{ XOR } b}_{\text{vera}} \iff$ a vera o b vera ma non entrambe.

$\underbrace{a \text{ AND } b}_{\text{vera}} \iff$ a vera e b vera

Qualsiasi programma puó descriversi in termini di equazioni su $\mathbb{Z}_2$

Sia p un <u>numero primo</u>

e definiamo $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ come la

struttura algebrica ove $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$

$$\alpha +_p \beta := (\alpha+\beta) \% p =$$

= resto della divisione di $\alpha+\beta$ per p

$$(\alpha \cdot_p \beta) := (\alpha \cdot \beta) \% p$$

resto della divisione di $\alpha \cdot \beta$ per p

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$p = 5$

$\mathbb{Z}_4$

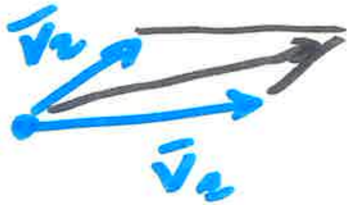
$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$\leftarrow$ NON È UN CAMPO!!

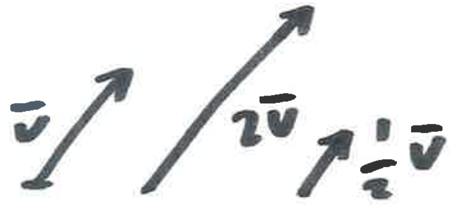
CAMPO $\rightarrow$ proprietà algebriche "astratte" dei numeri razionali / reali / complessi.

Spazio vettoriale

vettori = "frecce"



sommabili



scalabili

cosa è una freccia?

segmento orientato

→ OGGETTO CHE HA

- DIREZIONE
- VERSO
- LUNGHEZZA.

→ SCALARE UNA FRECCIA :

$\bar{V}$ = DIR. = d, VERSO = v, LUNGH. = ℓ

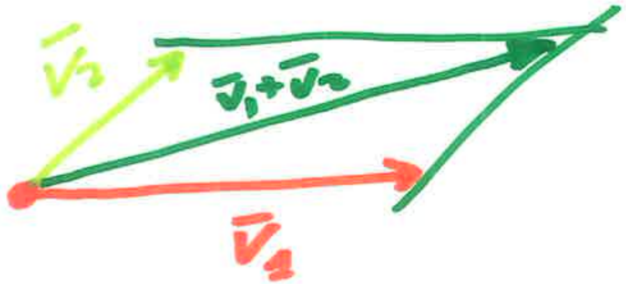
DIR = d
VERSO = v
LUNG = $\alpha \cdot \ell$

$\alpha \in \mathbb{R}^+$

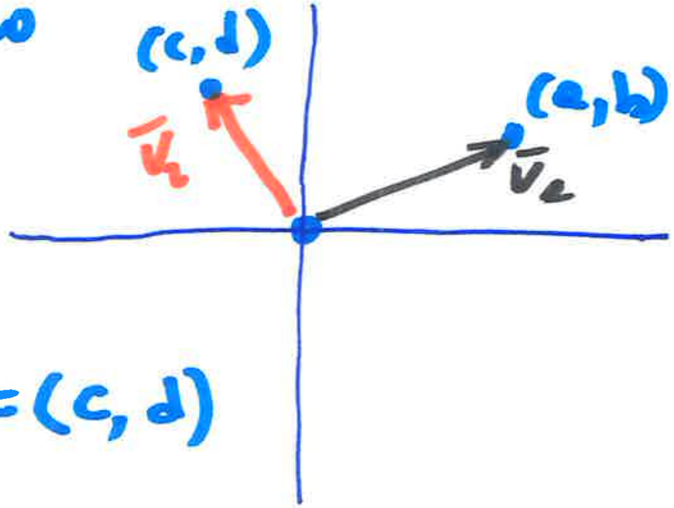
→ CAMBIARE IL VERSO

$\bar{v} =$ DIR $= d$, VERSO $= v$, LUNG. $= \ell$ → DIR d, VERSO $= -v$, LUNG $= \ell$.

$\bar{v} + (-\bar{v}) = \underline{0}$



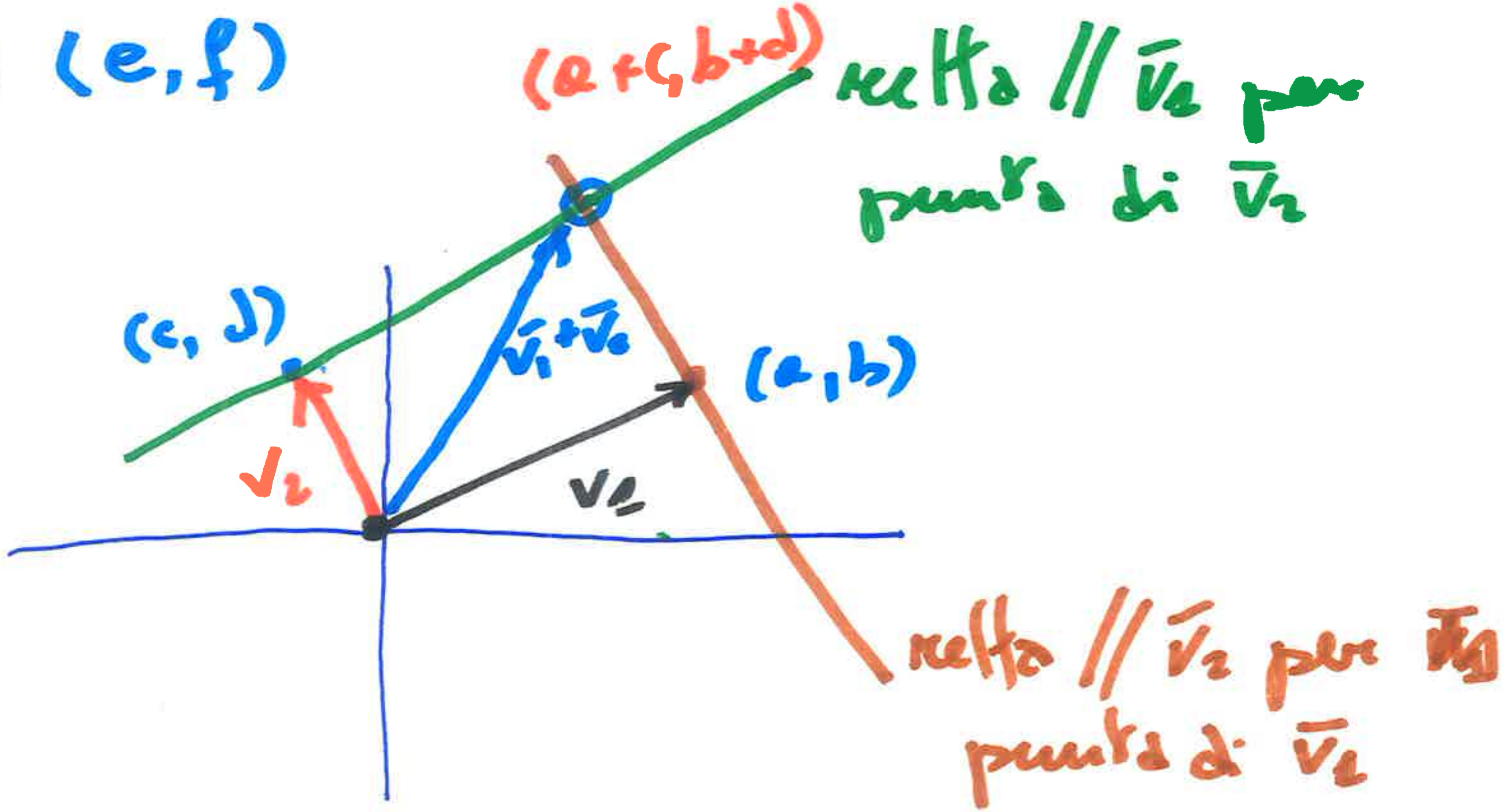
Nel piano cartesiano



un vettore é identificato da dove si trova la sua "punta".

$\bar{v}_1 = (a, b)$ $\qquad$ $\bar{v}_2 = (c, d)$

$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (e, f)$



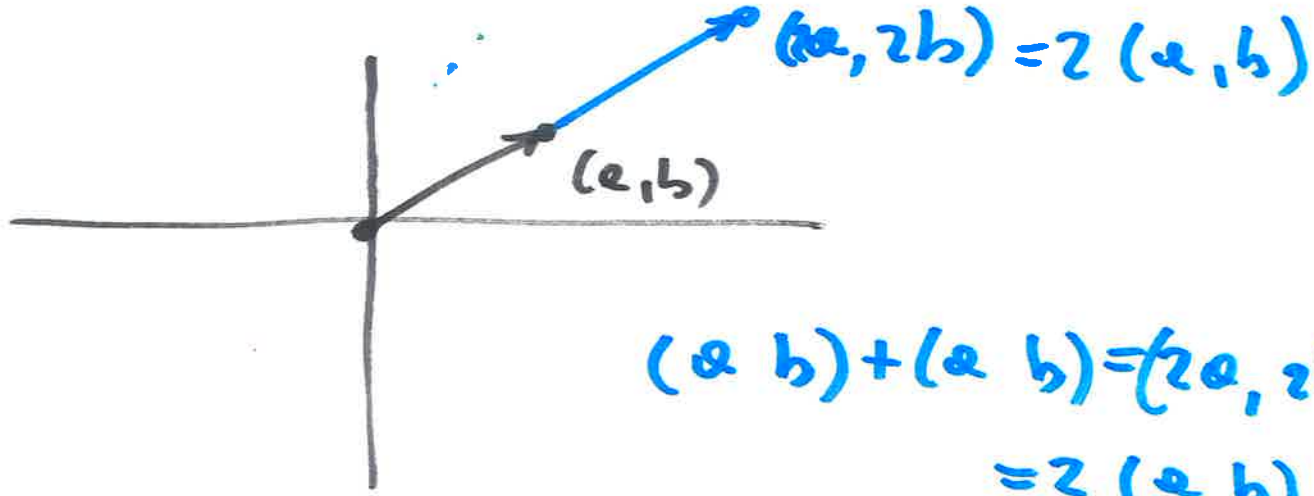
$dx = cy$ $\qquad$ $bx = ay$

$\downarrow$

$d(x-a) = c(y-b)$ $\qquad$ $b(x-c) = a(y-d)$

$(x, y) = (a+c, b+d)$ ✓

(a, b)



$$(a\ b)+(a\ b)=(2a, 2b)$$
$$=2(a\ b)$$

Def: Spazio vettoriale su di un campo $\mathbb{K}$.

Si dice spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$ su di un campo $\mathbb{K}$ una struttura algebrica formata da un insieme $V(\mathbb{K}) \neq \emptyset$ e 2 operazioni

$\tilde{+} : V \times V \to V$ dette somma di vettori

$\tilde{\cdot} : \mathbb{K} \times V \to V$ prodotto per scalare.

tali che.

1) $(V, +)$ è un gruppo abeliano.
2) $\forall \bar{v} \in V : 1 \tilde{\cdot} \bar{v} = \bar{v}$ (unitarietà).
3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{v} \in V$: $(\alpha + \beta) \tilde{\cdot} \bar{v} = \alpha \tilde{\cdot} \bar{v} \tilde{+} \beta \tilde{\cdot} \bar{v}$
4) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \bar{v}, \bar{w} \in V$: $\alpha \tilde{\cdot} (\bar{v} \tilde{+} \bar{w}) = \alpha \tilde{\cdot} \bar{v} \tilde{+} \alpha \tilde{\cdot} \bar{w}$

5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \bar{v} \in V$: $(\alpha \cdot \beta) \tilde{\cdot} \bar{v} = \alpha \tilde{\cdot} (\beta \tilde{\cdot} \bar{v})$.

3+4) $\to$ pseudo distributive

5) $\to$ pseudo associativa.

Gli ELEMENTI DI V sono detti vettori

" DI $\mathbb{K}$ sono detti scalari.

Esempio $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

$$\tilde{+} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a,b),(c,d) \longrightarrow (a,b) \tilde{+} (c,d) = (a+c, b+d). \end{cases}$$

$$\tilde{\cdot} \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \alpha, (a,b) \longrightarrow \alpha \tilde{\cdot} (a,b) = (\alpha a, \alpha b) \end{cases}$$

$\mathbb{R}^2$ è s. vettoriale su $\mathbb{R}$.

1) $(\mathbb{R}^2, +)$ è gruppo abeliano.

$(0,0) \in \mathbb{R}^2$ e $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a,b)+(0,0)=(a+0, b+0)$

$=(a,b)$

$(0,0)+(a,b)=(0+a, 0+b)=$

$=(a,b)$

EL. NEUTRO.

$(a,b)+(c,d)=(a+c, b+d)=(c+a, d+b)=(c,d)+(a,b)$

COMM.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ $\exists (-a,-b) \in \mathbb{R}^2$ tale che

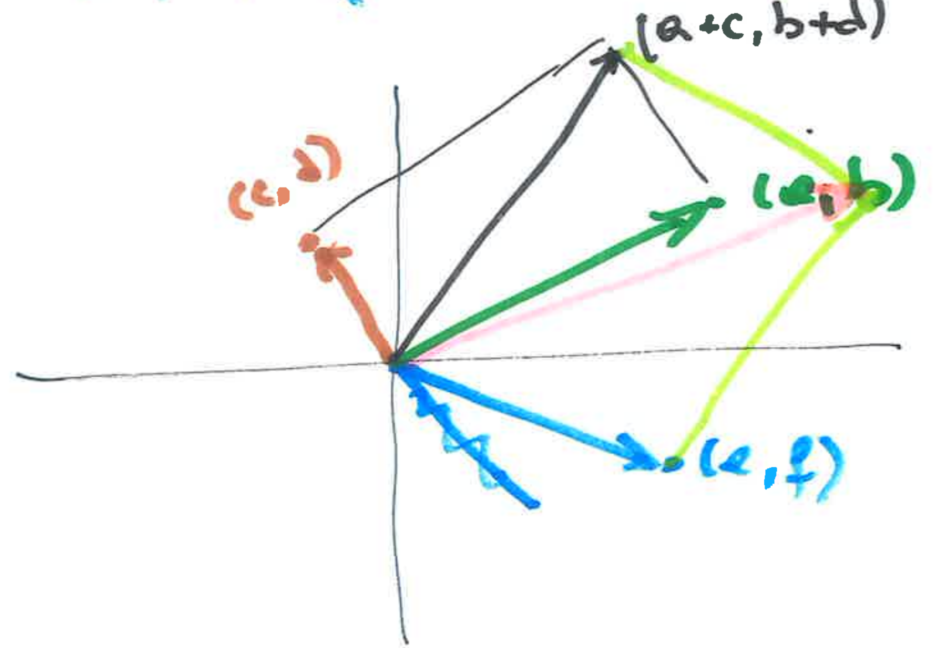
$(a,b)+(-a,-b)=(a-a, b-b)=(0,0)$

e quindi $(-a,-b) = -(a,b)$ INVERSO.

$\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{R}^2$:

$$\big((a,b)+(c,d)\big)+(e,f) =$$
$$= (a+c, b+d) + (e,f) =$$
$$= \big((a+c)+e, (b+d)+f\big) =$$
$$= \big(a+(c+e), b+(d+f)\big) = \ldots$$
$$= (a,b)+\big((c,d)+(e,f)\big).$$

✓.



2) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$: $1 \cdot (a,b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a,b)$ ✓

3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$(\alpha+\beta) \cdot (a,b) =$$

$$= ((\alpha+\beta)a, (\alpha+\beta)b) =$$

$$= (\alpha a + \beta a, \alpha b + \beta b) =$$

$$= (\alpha a, \alpha b) + (\beta a, \beta b) =$$

$$= \alpha (a,b) + \beta (a,b).$$ ✓

4) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha ((a,b) + (c,d)) =$$

$$= \alpha (a+c, b+d) = (\alpha(a+c), \alpha(b+d)) =$$

$$= (\alpha a + \alpha c, \alpha b + \alpha d) = (\alpha a, \alpha b) +$$

$$(\alpha c, \alpha d) = \alpha (a,b) + \alpha (c,d)$$ ✓

5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot (a,b) = ((\alpha\beta)a, (\alpha\beta)b) =$$
$$= (\alpha(\beta a), \alpha(\beta b)) =$$
$$= \alpha \cdot (\beta a, \beta b) =$$
$$= \alpha \cdot (\beta \cdot (a,b)) \quad \checkmark$$

$\square$

Lemma: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale siano $\alpha \in \mathbb{K}$, $\bar{v} \in V \Rightarrow \alpha \cdot \bar{v} = \underline{0}$ (vettore nullo = identità di $(V,+)$)

$\Leftrightarrow \alpha = 0$ oppure $\bar{v} = \underline{0}$.

DIM: $\forall \bar{v} \in V$: $\quad 0 \cdot \bar{v} = (0+0) \cdot \bar{v} = 0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v}$

sommando a dx e sx $-(0 \cdot \bar{v})$ si ottiene

$$\underline{0} = 0 \cdot \bar{v}$$

Supponiamo $\alpha\bar{v} = \underline{0}$ e $\alpha \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists\, \alpha^{-1} \in \mathbb{K} \quad \text{e} \quad \alpha^{-1}(\alpha\bar{v}) = \alpha^{-1}\underline{0} = \underline{0}$$

$$\alpha^{-1}(\alpha\bar{v}) = (\alpha^{-1}\alpha)\cdot\bar{v} = 1\cdot\bar{v} = \bar{v}$$

$$\alpha^{-1}\underline{0} = \alpha^{-1}(\underline{0}+\underline{0}) = \alpha^{-1}\cdot\underline{0} + \alpha^{-1}\underline{0}$$

come prima

$$\alpha^{-1}\underline{0} = \underline{0}$$

$\square$

COROLLARIO Sia $1 \in \mathbb{K}$ l'identità moltiplicativa
$-1 \in \mathbb{K}$ è il suo opposto.

$\forall\, \bar{v} \in V(\mathbb{K}) \qquad -\bar{v} = -1\cdot\bar{v}$

"$-(a,b) = (-a,-b) = -1\cdot(a,b)$"

DIM: $\underline{0} = (1-1)\bar{v} = 1\cdot\bar{v} + (-1)\cdot\bar{v} = \bar{v} + (-1)\bar{v}$

ma allora sommando a dx e sx $-\bar{v}$

otteniamo $-\bar{v} = (-1)\bar{v}$ $\square$

Esempi di spazio vettoriale.

1) $\mathbb{R}^2$ è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

2) $\mathbb{K}^2$ è spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

3) $\mathbb{K}$ è spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

4) Sia $n \geq 1$ intero $\mathbb{K}^n$ è sp. vettoriale su $\mathbb{K}$

ove $\mathbb{K}^n = \{(a_1, a_2 \dots a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}\}$

$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

$(a_1 \dots a_n), (b_1 \dots b_n) \longrightarrow (a_1 + b_1 \dots a_n + b_n)$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\lambda \; (a_1, \dots a_n) \longrightarrow (\lambda a_1, \lambda a_2 \dots \lambda a_n).$$

[Uno spazio vettoriale finitamente generato è univocamente descrivibile a partire da un campo $\mathbb{K}$ ed un intero $n \geq 0$]

5) $\{\underline{0}\} = V$ $\quad + : \begin{cases} V \times V \to V \\ (\underline{0}, \underline{0}) \to \underline{0} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbb{K} \times V \to V \\ \lambda, \underline{0} \to \underline{0} \end{cases}$

6) Sia X un insieme e ~~$\mathbb{K}$ un~~ $\mathbb{K}$ un campo.

consideriamo $\mathbb{K}^X$ $\cancel{X^{\mathbb{K}}}$ $:= \{ f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ funzione} \}$.

ALLORA $\mathbb{K}^X$ $\cancel{X^{\mathbb{K}}}$ è spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con le

OPERAZIONI

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha(f(x)).$$

DIM: $f(x) \equiv 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow \forall g(x) \in X^{\mathbb{K}}$

$$(g+f)(x) = g(x) + f(x) = g(x) + 0 = g(x)$$

$f(x) \in X^{\mathbb{K}} \Rightarrow -f(x) \in X^{\mathbb{K}}$ e

$$(f + -f)(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x$$

$f, g, h \in X^{\mathbb{K}}$

$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) =$$
$$= (f(x) + g(x)) + h(x) =$$
$$= f(x) + (g(x) + h(x)) =$$

$= (f+(g+h))(x)$ $\square$

$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$

etc.

CONSEGUENZA: Se $X = \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \cancel{X^{\mathbb{K}}} = \mathbb{K}^n = \mathbb{K}^X$ è spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

ALTRI ESEMPI

$X = \emptyset$ $\quad \cancel{X^{\mathbb{K}}} = \{\underline{0}\} = \mathbb{K}^X$

$V(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[x]$ insieme di tutti i polinomi a valori in $\mathbb{K}$

rispetto il prod. per scalare

$\alpha, \; p(x) = \sum a_i x^i \to \alpha p(x) = \sum \alpha a_i x^i$

__N.B.__: il prod.
$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times \mathbb{K}[x] &\longrightarrow \mathbb{K}[x] \\ \alpha, p(x) &\longrightarrow \alpha p(x) \end{aligned}$$

induce una st. di s. vettoriale.

quello
$$\Delta \quad \begin{aligned} \mathbb{K} \times \mathbb{K}[x] &\longrightarrow \mathbb{K}[x] \\ \alpha, p(x) &\longrightarrow p(\alpha x) \end{aligned}$$
__No__!

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$2 \,\Delta\, (1+x^2) = 1 + (2x)^2 = 1 + 4x^2$$
$$\shortparallel$$
$$(1+1)\,\Delta\,(1+x^2) =$$
$$1\Delta(1+x^2) + 1\Delta(1+x^2) =$$
$$= 2 + 2x^2$$

$\mathbb{Z}_2^n$ sp. vettoriale

$\mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua} \}$

successioni a valori in $\mathbb{K}$ $\qquad \mathbb{N} \to \mathbb{K}$

successioni convergenti in $\mathbb{R}$ $\qquad$ s. vettoriale.

STRUTTURA ALGEBRICA

1) COME DESCRIVERLA
2) QUALI SONO LE TRASFORMAZIONI CHE LA PRESERVANO ↕
3) COME OPERARE SU DI ESSA.

SOTTOSPAZIO VETTORIALE $X \subseteq V(\mathbb{K})$

È UN INSIEME X DI VETTORI DI $V(\mathbb{K})$ CHE È ESSO STESSO SPAZIO VETTORIALE RISPETTO LE OP. DI $V(\mathbb{K})$ TRONCATE E RISTRETTE AD X.

Su $V(\mathbb{K})$

$+ : V \times V \to V$

$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$

1) $\forall \bar{v} \in V : 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$

3

4

5

Su $X \subseteq V(\mathbb{K}) \Rightarrow$ ci serve

una $+ : X \times X \to X$

$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$

Restringere

$+ : V \times V \to V$ | $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$

$+ : X \times X \to V$ | $\cdot \mathbb{K} \times X \to V$

TRONCARE

$+ : X \times X \to X$ | $\cdot \mathbb{K} \times X \to X$

<u>oss</u>: le proprietà 2, 3, 4 e 5 di s. vettoriale valgono $\forall \bar{v}, \bar{w} \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow$ valgono anche $\forall \bar{v}, \bar{w} \in X$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

perché $X \subseteq V$ e quindi se $\bar{v} \in X$ allora $\bar{v} \in V$

COSA PUÓ NON VALERE?

può essere che non sia possibile

troncare $+ : X \times X \to V$ all'insieme X.

e $\cdot : \mathbb{K} \times X \to V$

serve che $Im(+) \subseteq X$ per poter troncare ad X
$Im(\cdot) \subseteq X$

+ il fatto che $(X, +)$ sia gruppo

X é sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$ se e solamente se

1) $\underline{o} \in X$

2) $\forall \bar{x} \in X : \; -\bar{x} \in X$

3) $\mathrm{Im}(+) \subseteq X$

4) $\mathrm{Im}(\cdot) \subseteq X$

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in X : \; \bar{x} + \bar{y} \in X$

$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \bar{x} \in X : \; \alpha \bar{x} \in X$

N.B : $(3)+(4) \Rightarrow (1)+(2)$

Infatti da (4) con $\alpha = 0 \Rightarrow 0 \cdot \bar{x} \in X \Rightarrow \underline{o} \in X$ (1)

da (4) con $\alpha = -1 \Rightarrow (-1) \cdot \bar{x} = -\bar{x} \in X$ $\forall \bar{x} \in X$

$$\left.\begin{array}{l} \forall \bar{x}, \bar{y} \in X : \ \bar{x} + \bar{y} \in X \\ \forall \alpha \in \mathbb{K} \ \forall \bar{x} \in X : \ \alpha \bar{x} \in X \end{array}\right] \text{ proprietà di chiusura.}$$

X è un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$ se $X \neq \emptyset$ ed è chiuso rispetto le operazioni di $V(\mathbb{K})$.
cioè dati elementi $\alpha \in \mathbb{K}$ e vettori $\bar{x}, \bar{y} \in X$ NON è POSSIBILE USCIRE DA X mediante le operazioni di $V(\mathbb{K})$.

Def: Siano $(\bar{v}_1, \dots \bar{v}_n)$ vettori di $V(\mathbb{K})$ e $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ elementi di $\mathbb{K}$. Si dice combinazione lineare dei vettori $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n$ con gli scalari $\alpha_1 \dots \alpha_n$ il vettore

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$$

Teorema: $X \leq V(\mathbb{K})$ $\qquad \leq =$ sottospazio

$\Leftrightarrow$ X è chiuso rispetto le comb. lineari dei suoi vettori

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\forall \bar{x}, \bar{y} \in X \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}: \ \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in X}$ $(*)$

DIM: Se $X \leq V(\mathbb{K}) \Rightarrow$ ogni c. lineare di suoi vettori deve essere un elemento di $X \Rightarrow (*)$ vale.

viceversa: se $(*)$ vale $\Rightarrow$ posti $\alpha = \beta = 0$
abbiamo $0 \cdot \bar{x} = \underline{0} \in X$

$\forall \bar{x} \in X$ posto $\alpha = -1, \beta = 0$ $\ -\bar{x} \in X$

presa una c. lineare di n termini in X

$\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_n x_n =$

$$(\alpha_1\bar{x}_1+\alpha_2\bar{x}_2)+\alpha_3\bar{x}_3+\dots+\alpha_n\bar{x}_n =$$

$$= \bar{x}_1' + \alpha_3\bar{x}_3+\dots+\alpha_n\bar{x}_n$$

con $\bar{x}_1' = \alpha_1\bar{x}_1+\alpha_2\bar{x}_2 \in X$

Iterando arriviamo ad una c. lineare di 2 soli termini che per (*) ci dà un vettore di X.

$\square$

ESSERE CHIUSO RISPETTO C. LINEARI DI n TERMINI $\iff$ $\boxed{\text{ESSERE CHIUSO RISPETTO C. LINEARI DI 2 TERMINI} \iff \text{ESSERE SOTTOSPAZIO}}$

In $\mathbb{R}^4 = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$.

quali di questi insiemi sono sottospazi

$A = \{(a, 0, -a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

$B = \{(1, 2, a+b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

$C = \{(0\ a, b, 0) \mid a^2 + b^2 = 1,\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

$D = \{(a, b, 0, 0) \mid ab = 0\}$.

$G = \{(a,b,c,d) \mid a+b=1\}$.

$E = \{(a, b, 0, 0) \mid a^2 + b^2 = 0\}$.

$F = \left\{(a, b, c, d) \;\middle|\; \begin{matrix} a+b=0 \\ c-d=0 \end{matrix}\right\}$