Algebra lineare e geometria.

↓

Strutture matematiche e loro trasformazioni. → STRUTTURA DI SPAZIO VETTORIALE. (di dimensione finita)
TRASFORMAZIONI LINEARI

- TEORIA DEI SISTEMI LINEARI (m equazioni in n incognite)
(o DIAGONALIZZAZIONE DI MATRICI)
- GEOMETRIA AFFINE / EUCLIDEA / PROIETTIVA

Richiami di teoria degli insiemi.

Insieme $\rightarrow$ collezione non ordinata di oggetti senza ripetizioni (= distinti) da cui si può estrarre un qualsiasi elemento e per cui

naïve

si può sempre determinare se dato x "oggetto" $x \in A$

A = insieme o $x \notin A$.

$\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$

$\{a, a, b\} = \{a, b\}$.

Zermelo Frankel + Assioma della scelta

ZFC

Insiemi $\{ \ldots \}$.

$$\{ x \in A \mid p(x) \} = \{ x \in A : p(x) \}.$$

$x \in A$ tali che valga la proprietà $p(x)$

ove $p(x)$ è una formula logica nella variabile x

$$\{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è pari} \}.$$

$$\{ x \mid x \text{ è pari} \}.$$

Supponiamo che la categoria di tutti gli insiemi $\mathcal{I}$ sia un insieme

$\Rightarrow$ possiamo costruire

$$\mathcal{R} = \{ A \in \mathcal{S} \mid A \notin A \}.$$

ci domandiamo $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$?

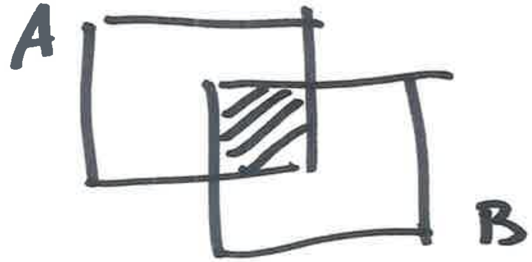
Se fosse $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ allora non vale la prop. che definisce $\mathcal{R}$ $\Rightarrow$ ASSURDO $\lightning$

Deve essere $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ $\Rightarrow$ vale la prop. che definisce $\mathcal{R}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ $\Rightarrow$ ASSURDO $\lightning$

$\rightarrow$ LA CATEGORIA DI TUTTI GLI INSIEMI NON È UN INSIEME.

Se A, B insiemi possiamo definire

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}.$$



se non esiste $x : x \in A \ \& \ x \in B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

ove $\emptyset$ insieme vuoto $\Rightarrow$ insieme per cui

$\forall x : x \notin \emptyset$

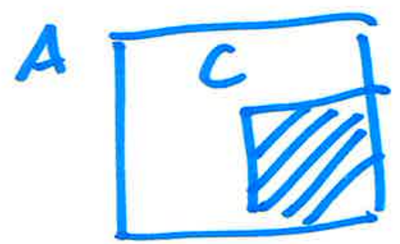
$\forall$ per ogni.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$\{x \in A \mid x \in B\} = \{x \in A \mid x \in A \ \& \ x \in B\}$$
$$= \{x \in B \mid x \in A \ \& \ x \in B\} = \{x \in B \mid x \in A\}$$
$$= B \cap A$$

Se A insieme, si dice che $C \subseteq A$ (sottoinsieme)

se $\forall_{c \in C} : c \in A$

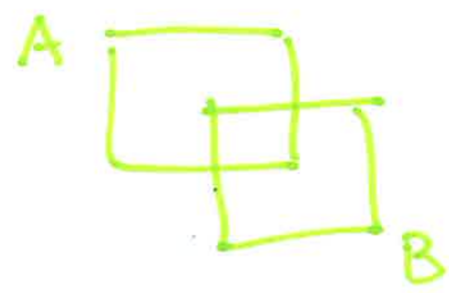


oss.:
$A \cap B \subseteq A$
$A \cap B \subseteq B$

$A \cup B := \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$ (oppure)

$x \in A \cup B \iff x \in A$ oppure $x \in B$

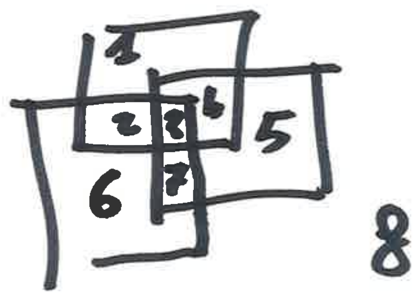
(se e solo se)



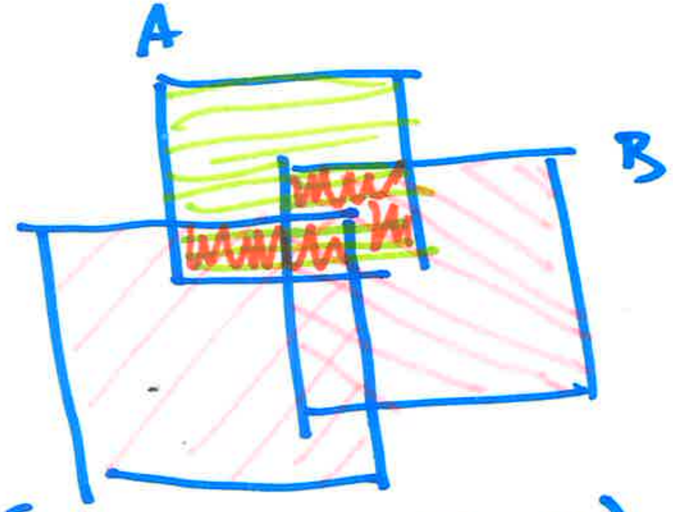
$A \cup B = B \cup A$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

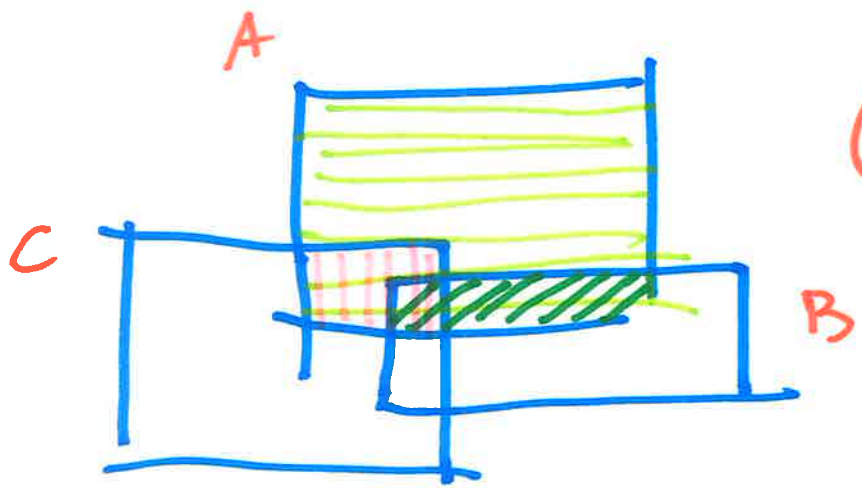
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



	A	B	C
1	$\in$	$\notin$	$\notin$
2	$\in$	$\notin$	$\in$
3	$\in$	$\in$	$\in$
4	$\in$	$\in$	$\notin$
5	$\notin$	$\in$	$\notin$
6	$\notin$	$\notin$	$\in$
7	$\notin$	$\in$	$\in$
8	$\notin$	$\notin$	$\notin$



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$.

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

INSIEME NON È ORDINATO.

DEFINIZIONE DI PRODOTTO CARTESIANO DI 2 INSIEMI.

$$A \times B := \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}.$$

coppia ordinata

$$(a,b) \neq (b,a)$$

$$(a,a)$$

$$(a,b) := \{ \{a\}, \{a,b\} \}. \qquad (a,a) = \{ \{a\}, \{a,a\} \} = \{ \{a\}, \{a\} \} = \{ \{a\} \}.$$

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\} \neq (b,a) = \{\{b\},\{b,a\}\} =$$
$$= \{\{b\},\{a,b\}\}.$$

se $b \neq a$

DATO $\{\{a\},\{a,b\}\} = X$

1) Se $|X| = 1 \Rightarrow X = \{\{x\}\} \rightarrow (x,x)$

cardinalità

2) Se $|X| = 2 \Rightarrow X = \{Y, Z\}$ con $|Y| = 1$, $|Z| = 2$

poniamo y = unico elemento di Y

z = elemento di $Z \setminus Y \rightarrow (y,z)$.

$$A \times (B \times C) = \{ \underbrace{(a,(b,c))} : a \in A, b \in B, c \in C \}.$$

$$(A \times B) \times C = \{ \underbrace{((a,b),c)} : a \in A, b \in B, c \in C \}.$$

$$A \times B \times C = \{ (a,b,c) : a \in A, b \in B, c \in C \}.$$

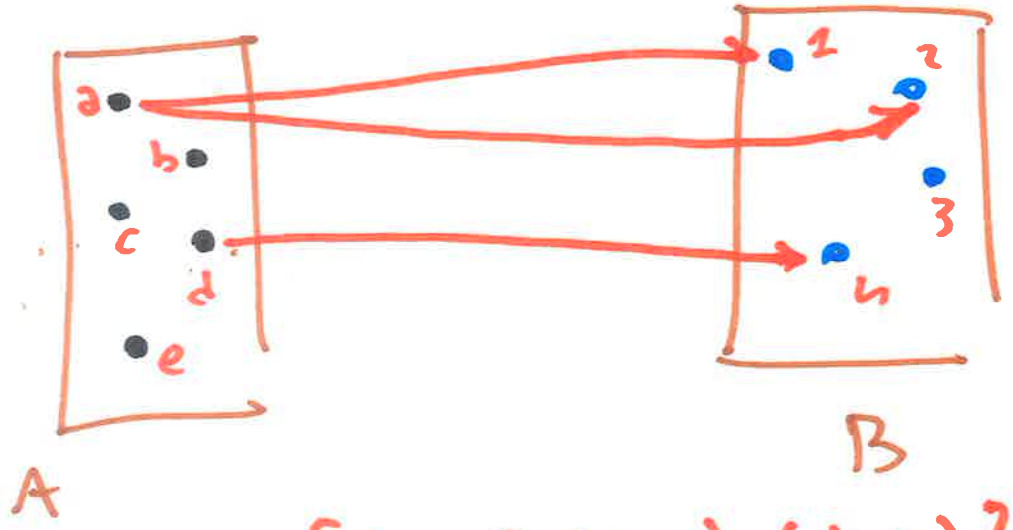
$$A^n = \begin{cases} A \times A^{n-1} & n \geq 2 \\ A & n = 1 \end{cases}$$

$$A^3 = \{ (a,b,c) \mid a,b,c \in A \}.$$

$A = \{1,2\}$ $\quad$ $B = \{x,y\}$ $\Rightarrow$ $A \times B = \{ (1,x), (1,y), (2,x), (2,y) \}.$

$B \times A = \{ (x,1), (x,2), (y,1), (y,2) \}.$

Def: Siano A, B insiemi. Si dice corrispondenza fra A e B un insieme $C \subseteq A \times B$.



$\{(a,1),(a,2),(d,4)\}$

Def: Una corrispondenza $C \subseteq A \times B$ è detta

- OVUNQUE DEFINITA se $\forall a \in A \ \exists b \in B : (a,b) \in C$

  (da ogni el. di A parte una freccia)

• FUNZIONALE se $\forall a \in A \ \exists_{\leq 1} \ b \in B : (a,b) \in C$

(da ogni el. di A parte al più una freccia).

esiste al più 1

• Se C è ovunque definita e funzionale

$\Rightarrow$ C è detta funzione di dominio A e codominio B.

$$c : A \to B$$

In tale caso scriveremo anche $c(a) = b$ per dire $(a,b) \in C$

$$f : \begin{cases} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \\ x \to 2x \end{cases} \qquad f' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 2x \end{cases} \qquad f'' \begin{cases} \mathbb{H} \to \mathbb{R} \\ x \to 2x \end{cases}$$

$f: A \to B$ funzione è detta

- iniettiva se $\underline{\underline{\forall b \in B}}\ \exists_{\leq 1}\, a \in A : (a,b) \in f$
  $f(a) = b$
- suriettiva se $\underline{\underline{\forall b \in B}}\ \exists\, a \in A : f(a) = b.$

$c \subseteq A \times B$ è detta

- funzionale se $\underline{\underline{\forall a \in A}}\ \exists_{\leq 1}\, b \in B : (a,b) \in \cancel{f}\, c$
- ovunque definita se $\underline{\underline{\forall a \in A}}\ \exists\, b \in B : (a,b) \in c.$

Se $c \subseteq A \times B$ è una corrispondenza $\Rightarrow$ definiamo

$$c^{opp} := \{ (b,a) \in B \times A : (a,b) \in c \}.$$

f è iniettiva $\Leftrightarrow$ f^{opp} è funzionale

f é suriettiva $\Leftrightarrow$ f^{opp} è ovunque definita.

f è $\left[\begin{array}{l}\text{iniettiva e}\\ \text{suriettiva}\end{array}\right] \Leftrightarrow f^{opp}$ é $\left[\begin{array}{l}\text{funzionale e}\\ \text{ovunque definita}\end{array}\right]$

$\qquad\qquad\parallel\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\parallel$

<u>BIIETTIVA</u> $\qquad\qquad\qquad\qquad$ <u>FUNZIONE.</u>

devono coincidere

Siano $f: A \to B$ e $g: B \to C$ due funzioni

chiamiamo $(g \circ f): A \longrightarrow C$ e che associa ad $a \in A$ $g(f(a))$

$$(g \circ f) = \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a,b) \in f \text{ e } (b,c) \in g\}.$$

cosa é $(f^{opp} \circ f)$ quando f biiettiva?

f biiettiva.

$f^{opp} \circ f : A \to A$

$\forall a \in A \ \exists! \, b \in B : f(a) = b$

ma $\forall b \in B \ \exists! \, \tilde{a} : (b, \tilde{a}) \in f^{opp}$

$(b, \tilde{a}) \in f^{opp} \iff (\tilde{a}, b) \in f$

e $(\tilde{a}, b) \in f \iff a = \tilde{a}$

perché f iniettiva.

<u>QUINDI</u> $f^{opp}(b) = a \Rightarrow f^{opp}(f(a)) = a$

per ogni elemento $a \in A$

$\Rightarrow (f^{opp} \circ f) = id_A$ funzione identica su A

$id_A(x) = x \quad \forall x \in A$

$id_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

$f \circ f^{opp} : B \to B$

con lo stesso ragionamento $f \circ f^{opp} = id_B$.

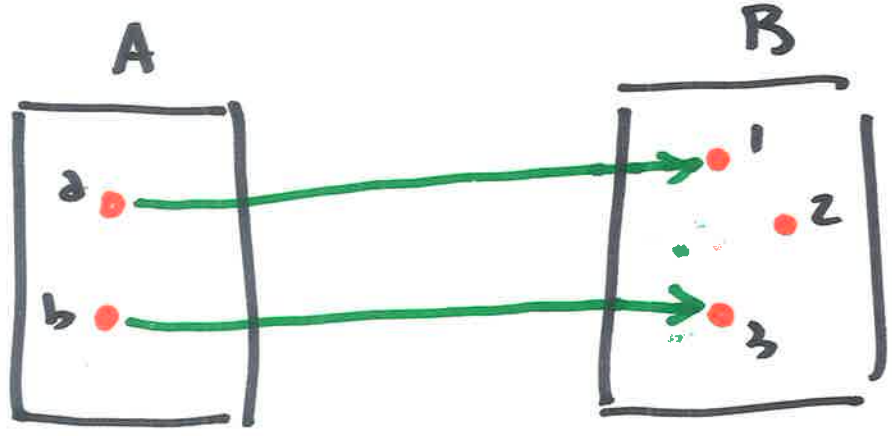
Def: Una funzione $f : A \to B$ è detta invertibile $\iff \exists\, f^{-1} : B \to A$ funzione tale che

$$f^{-1} \circ f = id_A$$
$$f \circ f^{-1} = id_B.$$

ABBIAMO VISTO CHE SE f biiettiva $\Rightarrow f$ È INVERTIBILE.

1-1

E se f non è biiettiva?!
LA FUNZIONE INVERSA f^{-1} NON PUÒ ESISTERE.



$f(a) = 1$
$f(b) = 3$

Definisco $g : B \to A$
come $g(1) = a$, $g(3) = b$
$g(2) = a$

$(g \circ f) : A \to A$

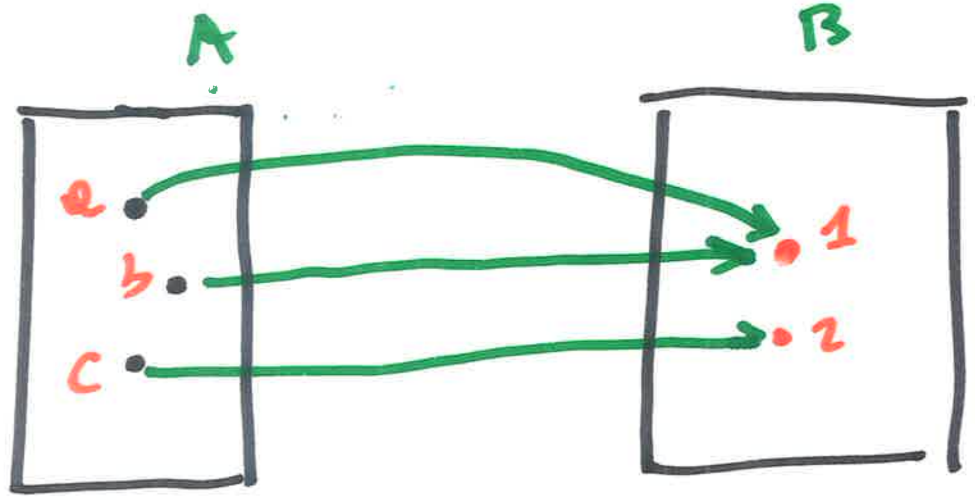
$g(f(a)) = g(1) = a$
$g(f(b)) = g(3) = b$

id_A INV. A SINISTRA

VORREMMO
$h : B \to A$ tale
che $(f \circ h) = id.$

$h(1) = a$
$h(3) = b$
$h(2) = ??$

NON ESISTE INVERSA A DESTRA.



$f(a) = 1$
$f(b) = 1$
$f(c) = 2$

$g(2) = c$
$g(1) = ?$

in questo caso non esiste g tale che $(g \circ f) = id_A$

"INVERSA A SINISTRA"

esiste $h: B \to A$ tale che

$(f \circ h): B \to B$

sia l'identità.

$h(1) = a$
$h(2) = c$

INVERSA A DESTRA

OSS: Una funzione $f: A \to B$ ammette

INVERSA A DESTRA $\Leftrightarrow$ É SURIETTIVA

INVERSA A SINISTRA $\Leftrightarrow$ É INIETTIVA

INVERSA $\Leftrightarrow$ È BIIETTIVA.

N.B. La funzione inversa se esiste è unica.

Le inverse a sinistra o a destra (se f non è biiettiva) quando esistono non sono uniche.

Def: Si dice che due insiemi A e B hanno la stessa cardinalità (= # di elementi) se esiste una funzione $f: A \to B$ biiettiva e in tal caso scriviamo $|A| = |B|$

se $\exists f: A \to B$ suriettiva scriviamo $|A| \geq |B|$

se $\exists f: A \to B$ iniettiva scriviamo $|A| \leq |B|$