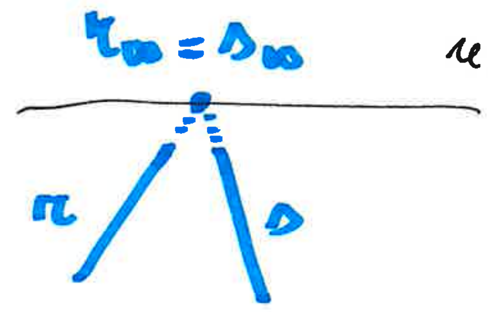
Ampliamento proiettivo

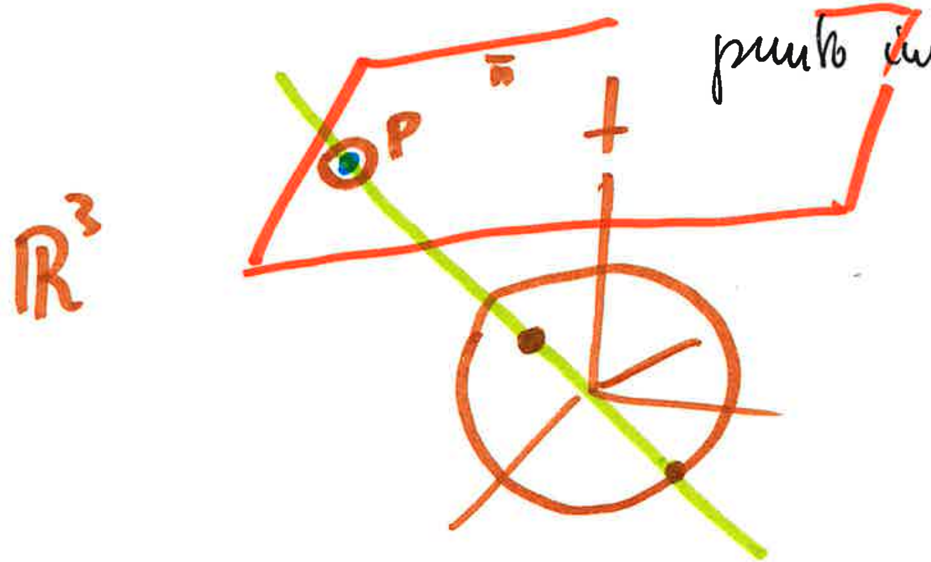
$AG(n, \mathbb{K}) \rightarrow$ AGGIUNGIAMO DEI <u>PUNTI IMPROPRI</u>

$\rightarrow$ rappresentanti delle direzioni delle rette.

<u>punti</u> <u>propri</u>
↓
punti al finito

due rette parallele hanno il medesimo punto improprio.





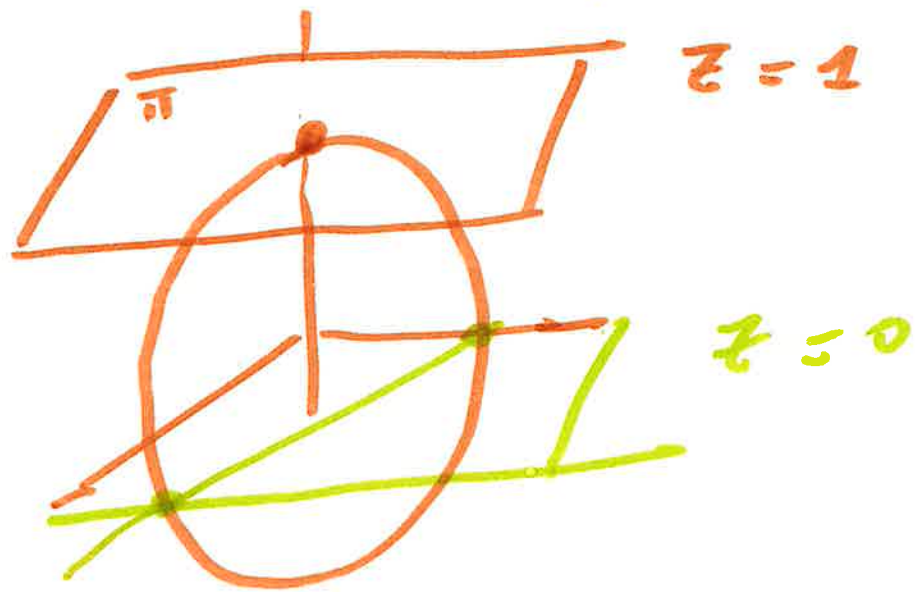
Consideriamo Σ = sfera di centro $(0,0,0)$ e $r = 1$

π = piano di eq. $z = 1$

$\forall P \in \pi$ considero l'intersezione della sfera con la retta (il sott. vettoriale di dim = 1 generato da P) che congiunge P con (0 0 0).

$\Sigma \cap V_P = \{A, B\}$.

per ogni coppia di punti antipodali su Σ c'è un punto P in π. ~~per ogni~~ a meno che tali punti non siano sul piano $z=0$



Due punti antipodali su $z=0$ determinano una retta parallela al piano π e dunque disgiunta da esso.

1) ABBIAMO UNA BIIEZIONE FRA: | punti propri

le rette per (000) ~~cala~~ non contenute in $z=0$ e i punti di π.

$\|$

sottospazi 1 dimensionali di $\mathbb{R}^3$ con generatore (a,b,c) con $c \neq 0$

2) rette per (000) contenute in $z=0$ e direzioni delle rette di π. | punti impropri

$\Rightarrow$ sottospazi 1-dim. di $\mathbb{R}^3$ con gen. $(a,b,0)$

Siano $(a,b) \in AG(2,\mathbb{R})$

$\downarrow$

rappr (a,b) in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ con il sott.

$[(a,b,1)]$

Siano $\mathcal{L}((\ell,m))$ la dir. di una retta di $AG(2,\mathbb{R})$

$\rightarrow$ rappr. (ℓ,m) con $[(\ell,m,0)]$

$ax+by+c=0$

gen. retta di $AG(2,\mathbb{K})$

$\longrightarrow$

$x_3\left(a\frac{x_1}{x_3}+b\frac{x_2}{x_3}+c\right)=0$

$ax_1+bx_2+cx_3=0$

eq. omogenea.

$\downarrow$

sott. vettoriale di $\dim=2$

ma studiando i vettori di tale sottospazio
(corrisponde alle int. del piano per Origine
e retta data con la sfera Σ).

vediamo che per $x_3 = 0 \to [(-b, a, 0)]$

$\downarrow$

punto improprio

= dir. della retta.

per $x_3 \neq 0$ i sott. devono
essere generati da vettori
$[(\hat{x}, \hat{y}, 1)]$ con $\hat{x}, \hat{y}$
soluzioni di $a \frac{x_1}{x_3} + b \frac{x_2}{x_3} + c = 0$

→ punti propri della retta di partenza.

<u>In generale</u>: definiamo $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ = spazio proiettivo di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$.

→ Geometria ove i punti sono rappresentati dai sottospazi 1-dimensionali di $\mathbb{K}^{n+1}$ e le rette dai sott. 2-dimensionali di $\mathbb{K}^{n+1}$.

1) → il luogo dei punti di eq. $x_{n+1} = 0$ in $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ è detto iperpiano improprio.

2) → fra tutti i punti di $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ di coord. $[(x_1 \dots x_n\, x_{n+1})]$ con $x_{n+1} \neq 0$ e i punti di $AG(n, \mathbb{K})$ c'è una biiezione.

3) fra tutti i punti dell'iperpiano improprio e le direzioni delle rette di $AG(n,\mathbb{K})$ c'è una biiezione.

DATO UN ENTE DI $AG(n,\mathbb{K})$ CHE HA FRA LE SUE EQ.

$$f(x_1 \dots x_n) = 0$$

in $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ abbiamo l'eq. omogenea

$$\rightarrow F(x_1 \dots x_n\, x_{n+1}) = 0$$

ove

$$\cancel{F(x_1 \dots x_{n+1}) = x_{n+1}^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right)}$$

$$\boxed{F(x_1 \dots x_{n+1}) = x_{n+1}^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_{n+1}} \dots \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)}$$

è un polinomio omogeneo.

I punti propri di $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ che soddisfano $F(x_1 \dots x_{n+1})=0$ sono in corrispondenza esattamente con i punti di $AG(n, \mathbb{K})$ che soddisfano $f(x_1 \dots x_n)=0$.

$$\tilde{V}(F) = \{ \underbrace{[(x_1 \dots x_{n+1})]}_{\in \mathbb{P}^n\mathbb{K}} \mid F(x_1 \dots x_{n+1}) = 0 \}.$$

– <u>Teorema</u>: In $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ due rette distinte hanno sempre ~~hanno~~ esattamente un punto in comune. Tale punto è un punto proprio se esse sono incidenti in $AG(2, \mathbb{K})$; improprio se sono parallele (o una di esse è la retta impropria).

DIM: Siano r, s due rette di $AG(2,\mathbb{K})$.
Esse corrispondono a 2 sp. vettoriali R, S di dim entrambi 2 in $\mathbb{K}^3$
$\Rightarrow \dim(R \cap S) \geq 1$ per GRASSMANN $\Rightarrow \exists$ un punto comune fra R ed S. $\square$

$[(1\,1\,1)] = [(2\,2\,2)]$

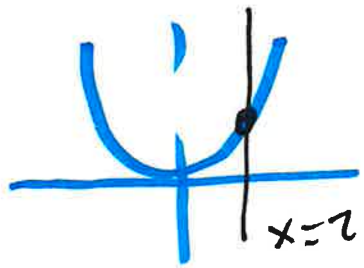
OSS: il punto improprio di una retta affine è la sua direzione.
Cosa sono i punti impropri di curve di $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$?
Sono quelli di $\tilde{V}(F) \cap [x_3=0]$.

CONICA GENERALE: Curva algebrica reale piana del II ordine priva di punti doppi

- ELLISSI → 2 punti impropri immaginari
- IPERBOLE → 2 punti impropri reali e distinti
- PARABOLE → 1 punto improprio reale contato 2 volte.

Teorema dell'ordine: Sia $\mathcal{C} = \tilde{V}(F)$ una curva algebrica in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$. Allora ogni retta r di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ interseca $\mathcal{C}$ in esattamente n punti contati con la debita molteplicità, ove $n = \deg F$, a meno che non sia $r \subseteq \mathcal{C}$.

$AG(2,\mathbb{C})$ $y = x^2$ e la retta $x = 2$



$\rightarrow x_3 x_2 = x_1^2$ $\qquad x_1 = 2x_3$

se risolviamo per $x_3 \neq 0$ otteniamo

$[(2,4,1)] = Q$

per $x_3 = 0 \rightarrow x_1 = 0$

$[(0\ 1\ 0)] = P_\infty$

DIM:

Siano $P = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$ $Q = \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix}$ due punti distinti di r.

$F(x_1\ x_2\ x_3) = 0$ eq. omogenea di $\mathcal{C}$.

Generico punto di r avrà coord del tipo $R_{\lambda,\mu}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix}$$

$$G(\lambda, \mu) := F(\lambda x_1' + \mu x_1'', \lambda x_2' + \mu x_2'', \lambda x_3' + \mu x_3'')$$

$$\rightarrow R_{\lambda,\mu} \in \tilde{V}(F) \iff G(\lambda, \mu) = 0$$

oss. che ci sono 2 possibilità:

1) $G(\lambda,\mu) \equiv 0 \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \Rightarrow r_G \subseteq \tilde{V}(F)$.

2) $G(\lambda,\mu) \not\equiv 0 \Rightarrow \underline{\deg G(\lambda,\mu) = n}$

perché F omogeneo di grado n.

$$G(\lambda,\mu) = \sum_{i=0}^{n} g_i \lambda^{n-i} \mu^{i} \quad \text{con } g_i \in \mathbb{C}.$$

2.1) $g_0 \neq 0 \Rightarrow$ in particolare $(1,0)$ non può essere tale che $G(1,0)=0$

perché $G(1,0) = g_0 \neq 0$

$\Rightarrow$ tutte le sol. di $G(\lambda,\mu)=0$ non banali hanno $\mu \neq 0$.

$\Rightarrow$ posso dividere per μ^n e posto $\xi = \frac{\lambda}{\mu}$

otteniamo $$H(\xi) = \frac{1}{\mu^n} G(\lambda, \mu) = \sum_{i=0}^{n} g_i \xi^{n-i}$$

per il teorema fondamentale dell'algebra

$H(\xi)$ ha n radici

visto che $\deg H(\xi) = n \rightarrow \exists$ n coppie del

tipo $[(\hat{\lambda}, \hat{\mu})]$ che sono sol. di $G(\lambda, \mu) = 0$

$\rightarrow$ n punti di intersezione.

<u>2.2)</u> $g_0 = g_1 = \dots = g_k = 0 \qquad g_{k+1} \neq 0$

$$G(\lambda,\mu) = g_{k+1}\lambda^{n-k-1}\mu^{k+1} + \dots + g_n\lambda^0\mu^n$$
$$= \mu^{k+1}\left(g_{k+1}\lambda^{n-k-1}\mu^0 + \dots + g_n\lambda^0\mu^{n-k-1}\right)$$

$\rightarrow$ in questo caso $[(\lambda,\mu)] = [(1,0)]$ è soluzione con molteplicità $k+1$

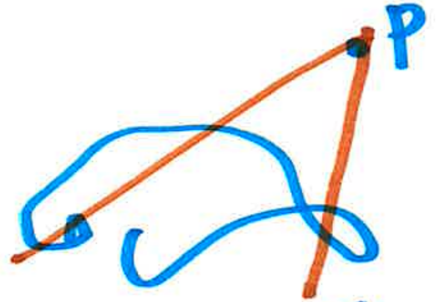
d'altro canto il polinomio $S(\lambda,\mu) = g_{k+1}\lambda^{n-k-1} + \dots + g_n\lambda^0\mu^{n-k-1}$ ha grado $(n-k-1)$ ed è omogeneo con $g_{k+1} \neq 0$ $\rightarrow$ per lo stesso ragionamento di prima esso ha $n-k-1$ soluzioni che corrispondono a punti $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ # totale punti intersezione

$$(n-k-1) + (k+1) = n \qquad \square$$

COROLLARIO: Ogni curva algebrica di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ ha infiniti punti.

DIM



$\mathcal{C} = \tilde{V}(F)$ e $P \notin \mathcal{C}$

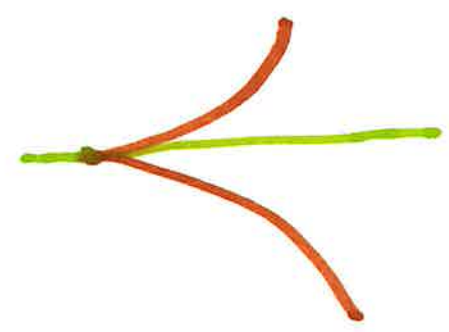
$\Rightarrow$ ogni retta per P interseca $\mathcal{C}$ in $n > 0$ punti e le intersezioni sono tutte distinte per rette distinte $\Rightarrow |\mathcal{C}| \geq n \cdot \#\text{rette per } P = \infty$

$\square$

__Def__: Un punto $P \in \tilde{V}(F)$ è detto __punto n-uplo__ se ogni retta per P interseca $\tilde{V}(F)$ in P con molteplicità almeno n e ci sono n rette che intersecano $\tilde{V}(F)$ in P con molteplicità $\geq n+1$.

→ Un punto 1-uplo è detto punto __semplice__.

→ Sia $P \in \tilde{V}(F)$ un punto semplice. La retta per P che interseca $\tilde{V}(F)$ in P con molteplicità > 1 è detta retta __tangente__ in P.



OSS: Una curva algebrica di ordine n non ha punti $(n+1)$-upli. Se essa ha un punto n-uplo $\Rightarrow$ essa è unione di n rette per quel punto.

$\rightarrow$ Se P $(n+1)$-uplo $\Rightarrow$ ogni retta per P interseca $(n+1)$-volte $\Rightarrow$ è contenuta in $\mathcal{C} = \tilde{V}(F)$ ↯ perché la curva coinciderebbe col piano.

$\rightarrow$ Altrimenti per induzione.

$\boxed{n=2}$ • P doppio.

sia $Q \in \mathcal{C} \setminus \{P\} \Rightarrow$ la retta PQ ha 3 intersezioni con la curva $\Rightarrow$ la retta PQ è contenuta nella curva.

d'altro canto se la retta PQ è contenuta in una curva di eq. $F(x_1\ x_2\ x_3) = 0 \Rightarrow$

$$F(x_1\ x_2\ x_3) = G(x_1\ x_2\ x_3)\, H(x_1\ x_2\ x_3) \text{ con}$$

$\deg H(x_1\ x_2\ x_3) = \deg F - 1$

e $G(x_1\ x_2\ x_3) = 0$ eq. della retta.

$\rightarrow$ se $\deg F(x_1\ x_2\ x_3) = 2$ e $\tilde{V}(F)$ contiene una retta

$\Rightarrow F = GH$ con $\deg G = \deg H = 1$

e $\tilde{V}(F) = \tilde{V}(G) \cup \tilde{V}(H)$.

$(n-1) \Rightarrow n$: immediato. P punto n-uplo per $\tilde{V}(F) \Rightarrow$ prendere $Q \in \tilde{V}(F) \setminus \{P\}$.

$\rightarrow G(x_1\ x_2\ x_3) = 0$ eq. retta $PQ \subseteq \tilde{V}(F)$ per il teorema dell'ordine $\Rightarrow F = G \cdot H$ con $\deg H = n-1$ e

P punto $(n-1)$-uplo per $\tilde{V}(H)$.

Cubica con punto triplo.

Sia $\mathbb{K}[x]$ l'anello di tutti i polinomi a coeff. in un campo $\mathbb{K}$. Possiamo definire

$$\frac{d}{dx} : \begin{cases} \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x] \\ x^n \to n \cdot x^{n-1} & n \geq 0 \\ x^0 \to 0 \end{cases}$$

$(1, x, x^2, \dots)$ BASE PER $\mathbb{K}[x]$ come s. vett.

$\frac{d}{dx}$ é una funzione lineare $\mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$.

d é detta derivata formale su $\mathbb{K}[x]$.

<u>OSS</u>: Sia $p(x)$ un polinomio a coeff. in $\mathbb{K}[x]$ e supponiamo $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$ cioé non esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ volte}} = 0$.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ok

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ok.

$\Rightarrow$ ξ é radice multipla di $p(x)$ se e solamente se ξ è radice sia di $p(x)$ che di dp

$2x - \xi$

$\frac{d}{dx} p(x)$.

ξ é radice multipla di $p(x)$ $\Leftrightarrow$ $p(x) = (x-\xi)^2 h(x)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} p(x) = 2(x-\xi) \cdot h(x) + (x-\xi)^2 \frac{d}{dx} h(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} p(x) \Big|_{\xi} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 - 2\xi x + \xi\right) = 2x - 2\xi$$

$$F(x_1\ x_2\ x_3)=0$$

$$r: \begin{cases} x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1'' \\ x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'' \\ x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3'' \end{cases}$$

supponiamo $P=(x_1'\ x_2'\ x_3') \in \tilde{V}(F)$

cosa significa che r è tg. in P?

$\downarrow$

$$F(\lambda x_1' + \mu x_1'', \lambda x_2' + \mu x_2'', \lambda x_3' + \mu x_3'') = 0$$

$\lambda = 1$ e $\mu = 0$ deve essere soluzione almeno doppia

~~imponiamo che~~ $\frac{\partial}{\partial F}$ $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ d passiamo a considerare l'eq. dividendo per ℓ

perché in ogni caso cerchiamo sol. con $\ell = 1$

$$F(x_1' + \xi x_1'',\ x_2' + \xi x_2'',\ x_3' + \xi x_3'') = 0 \qquad \xi = \infty \text{ sol.}$$

$$\left.\frac{d}{d\xi} F\right|_{\xi=0} = 0 \qquad \left.\frac{d}{d\xi} F\right|_{\xi} = \left.\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \ \frac{\partial F}{\partial x_2} \ \frac{\partial F}{\partial x_3} \right)\right|_{P} \cdot \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix} = 0$$

$$\nabla F|_P \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = 0$$

ove $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ = derivata formale prendendo come costanti i termini x_j $j \neq i$

<u>N.B.</u> può essere

$$\nabla F|_P = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ vuol dire che indipendentemente da

$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$ la retta considerata per P

ha almeno 2 intersezioni in P

$\Rightarrow$ il punto P è un punto doppio.

$$\mathcal{C}: \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

A = matrice della conica.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0 & 2a_{11}\cancel{x_1} + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0 & 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 0 & 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3 = 0 \\ F = 0 & {}^{T}XAX = 0 \end{cases}$$

$$2AX = \underline{0}$$

DATA UNA CONICA DI MATRICE A I SUOI PUNTI DOPPI SONO TUTTI E SOLI QUELLI TALI CHE LE LORO COORD. OMOGENEE SODDISFANO $AX = \underline{0}$

[CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE PRIVE DI PUNTI DOPPI.]

→ si usano le forme bilineari.

- In ambito proiettivo: possiamo vedere la conica come luogo dei punti isotropi per la forma quadratica $q(X) = {}^tXAX$ associata alla forma bilineare e simmetrica $b(X,Y) = {}^tXAY$ con A matrice della conica.

- Se siamo in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ possiamo sempre scegliere un riferimento rispetto cui la matrice A di una forma bilineare e simmetrica sia I. $\det(A) \neq 0$.

→ Tutte le coniche irriducibili sono equivalenti a $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

- Se siamo in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ possiamo sempre diagonalizzare A scegliendo un rif. opportuno ma i segni degli autovalori devono essere conservati.

$+ + +$ $\quad$ $- - -$ → forma definita pos/negativa ↓ non ci sono punti reali.

$+ + -$ $\quad$ $- - +$ ↓ Conica a punti reali.

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$

- In $AG(2,\mathbb{R}) \rightarrow$ dobbiamo considerare i pti all'∞.

data la matrice A studiare

$$\begin{cases} {}^tX A X = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x_1, x_2)\, A^* \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

ove $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$+ +$ $- -$ $\nearrow$ nessun punto reale $\Rightarrow$ ELLISSE

$+ -$ $- +$ $\nearrow$ 2 punti reali e distinti $\Rightarrow$ IPERBOLE

$0 +$ $0 -$ $\nearrow$ 1 punto reale contato 2 volte $\Rightarrow$ PARABOLA.

- In $\mathcal{E}G(2,\mathbb{R}) \rightarrow$ ci servono indicazioni sulla metrica.

le trasformazioni di $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ in se stesso che conservano le proprietà di incidenza sono tutte indotte da trasformazioni lineari di $\mathbb{K}^3$ invertibili + eventualmente automorfismi di $\mathbb{K}$.

↓

le trasformazioni di $AG(2,\mathbb{K})$ in se stesso che etc. etc. sono indotte da trasformazioni di $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ che mandano la retta $x_3=0$ in se stessa.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l \\ m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall\, l,m \in \mathbb{K}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{31} = a_{32} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TRASFORMAZIONI CHE FISSANO $(0\,0\,1)$.

$\Rightarrow a_{13} = 0 \quad a_{23} = 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\det A^* \neq 0$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

TRASFORMAZIONI DEL TIPO

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x + a_{13} \\ x + a_{23} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$ TRASLAZIONI.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + T$$

TRASFORMAZIONI DI $EG(2, \mathbb{R})$. → TRASFORMAZIONI AFFINI IN CUI LA DISTANZA È CONSERVATA

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ matrice ortogonale.}$$