Geometria Affine

$AG(n, \mathbb{K}) \hookrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{K}$

$(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, f)$

$EG(n, \mathbb{K})$ = geometria affine + nozione di distanza fra punti.

Def: Una funzione $d : A \times A \to \mathbb{R}$ è detta distanza se soddisfa le seguenti 3 proprietà:

1) $\forall P, Q \in A$: $d(P,Q) \geq 0$ e $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$
2) $\forall P, Q \in A$: $d(P,Q) = d(Q,P)$
3) $\forall P, Q, R \in A$: $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$.

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE.

(A, d) è detto spazio metrico.

(A, d) : spazio metrico. $A = \mathbb{K}^n$

- Supponiamo $\exists$ una funzione $\|\bar{x}\|$ su $\mathbb{K}^n$
  - $\|\bar{x}\| \geq 0 \ \forall \bar{x} \in \mathbb{K}^n$, $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \underline{0}$
  - $\|\alpha \bar{x}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|$
  - $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

[NORMA]

$$\Rightarrow \quad d : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$$
$$(\bar{x}, \bar{y}) \to \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

[spazio di Banach]

è una distanza.

N.B. la norma dice qualche cosa in più rispetto una "distanza" generica: indica la "lunghezza" di un vettore.

- Supponiamo $\exists$ un prodotto scalare definito positivo

$$* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ $\|\bar{x}\| := \sqrt{\bar{x} * \bar{x}}$ è una norma su $\mathbb{R}^n$

e quindi

$d(\bar{x}, \bar{y}) := \sqrt{(\bar{x}-\bar{y}) * (\bar{x}-\bar{y})}$ è una distanza

[Spazio di Hilbert]

prodotto scalare	$\Rightarrow$ NORMA	$\Rightarrow$ DISTANZA
ortogonalità	lunghezza	distanza.

Esempi: Su $\mathbb{R}^n$: prod. scalare definito positivo ha, rispetto una base ortonormale, la forma

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\Rightarrow \quad \|\bar{x}\|_2 = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

NORMA EUCLIDEA

$$\Rightarrow d_E(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(\bar{x}-\bar{y}) \cdot (\bar{x}-\bar{y})} = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$$

DISTANZA EUCLIDEA.

–

$$\|\bar{x}\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < \infty$$

$$\|\bar{x}\|_\infty = \sup |x_i|$$

$$d_p(\bar{x}, \bar{y}) := \|\bar{x} - \bar{y}\|.$$

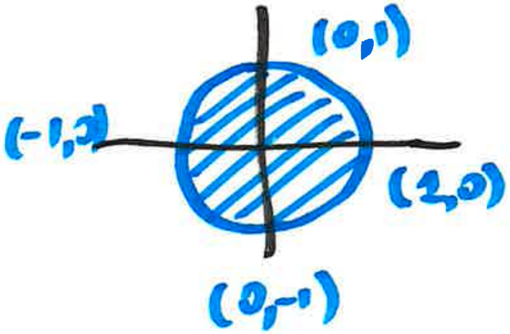
- $d_H(\bar{x},\bar{y}) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$

CONSIDERIAMO L'INSIEME DEI PUNTI A DISTANZA ≤ 1 DA $\underline{0}$ IN $\mathbb{R}^2$

$B_1(\underline{0}) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\bar{x},\underline{0}) \leq 1\}$.

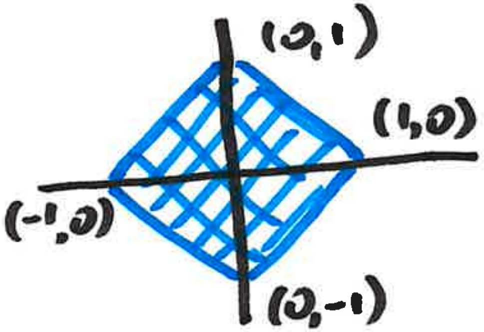
$\|\bar{x}\|_2$, norma euclidea.

$B_1^E(\underline{0}) = \{(x,y) : \|(x,y)\|_2 \leq 1\} =$
$= \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$.



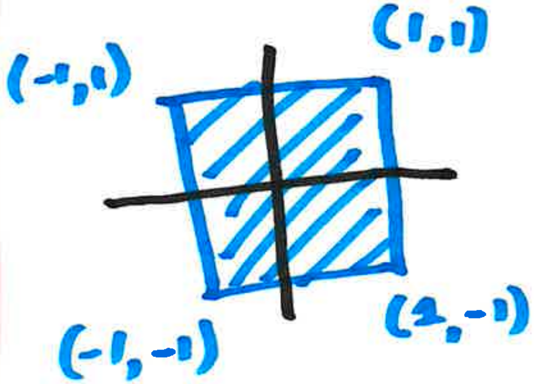
$\|\bar{x}\|_1 = |x|+|y|$

$\{(x,y) : |x|+|y| \leq 1\}$.



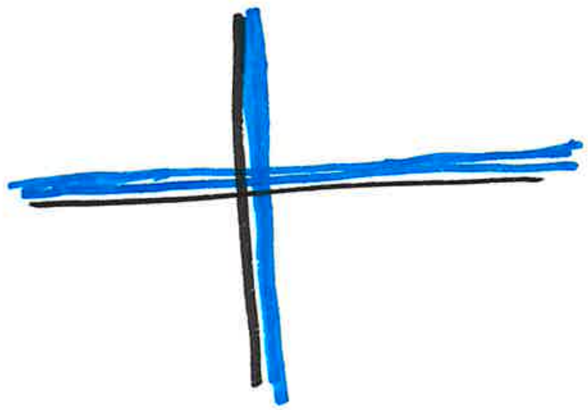
$\|\bar{x}\|_\infty = \sup(|x|,|y|)$

$\{(x,y) \mid \sup(|x|,|y|) \leq 1\}$.



d_{HAMMING}

$B_1^H(\underline{0}) = \{(x,y) : xy = 0\}$.



Una geometria Euclidea su $\mathbb{R}$ è una geometria $EG(n, \mathbb{R})$ in cui la struttura è data da $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, f)$ ed è definito su $\mathbb{R}^n$ un prodotto scalare euclideo (= positivo definito).

Def: In una geometria euclidea, un riferimento euclideo è un riferimento affine in cui la base di $\mathbb{R}^n$ è presa come una base ortonormale rispetto il prodotto scalare.

→ Rispetto un riferimento euclideo il prod. scalare ha come matrice la matrice identica e la distanza fra 2 punti si scrive come

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Def: Siano A, B due punti distinti di $EG(n, \mathbb{R})$. Si dice iperpiano assiale fra A e B il luogo dei punti X tali che $d(A,X) = d(B,X)$.

Def: Siano A, B due punti di $EG(n, \mathbb{R})$. Si dice punto medio fra A e B il punto M tale che
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

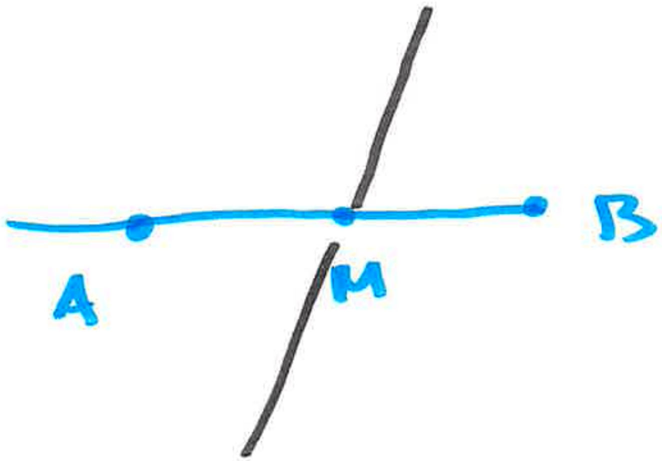
OSS: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Rightarrow B = A + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = A + 2\overrightarrow{AM}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

CHIARAMENTE $d(A,M) = d(M,B)$.

OSS: Se $A = (a_1 \dots a_n)$
$B = (b_1 \dots b_n)$

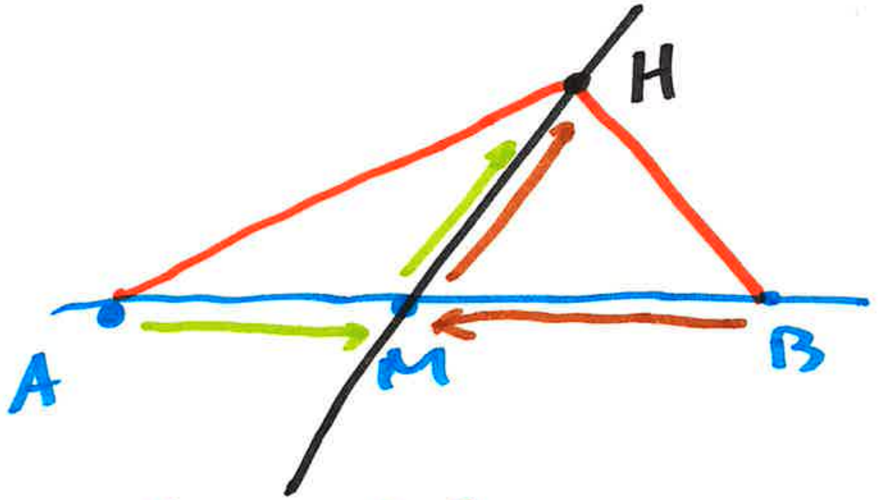
$$\Rightarrow M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} =$$
$$= (a_1 \dots a_n) + \frac{1}{2}(b_1 - a_1 \dots b_n - a_n)$$
$$= \frac{1}{2}(a_1 + b_1 \dots a_n + b_n).$$



Teorema: l'iperpiano assiale fra A e B è il luogo dei punti che si trovano sullo iperpiano ortogonale alla direzione $\overrightarrow{AB}$ passante per M.

$[M; \overrightarrow{AB}^{\perp}]$

DIM



1) Sia Π l'iperpiano assiale fra A e B $\Rightarrow$ $M \in \Pi$.

2) Sia adesso $H \in \Pi$ $\Rightarrow$ $d(A,H) = d(B,H)$

$\Rightarrow \|\vec{AH}\|^2 = \|\vec{HB}\|^2$

$\vec{AH} = \vec{AM} + \vec{MH}$

$\vec{BH} = \vec{BM} + \vec{MH} = -\vec{MB} + \vec{MH} =$

$= -\vec{AM} + \vec{MH}$

$(\vec{AM}+\vec{MH})\cdot(\vec{AM}+\vec{MH}) = (-\vec{AM}+\vec{MH})\cdot(-\vec{AM}+\vec{MH})$

$\|\vec{AM}\|^2 + \|\vec{MH}\|^2 + 2\vec{AM}\cdot\vec{MH} = \|\vec{AM}\|^2 + \|\vec{MH}\|^2 - 2\vec{AM}\cdot\vec{MH}.$

$H \in \Pi \iff 4\vec{AM}\cdot\vec{MH} = 0 \iff \vec{MH} \in \vec{AM}^{\perp}.$

$\square$

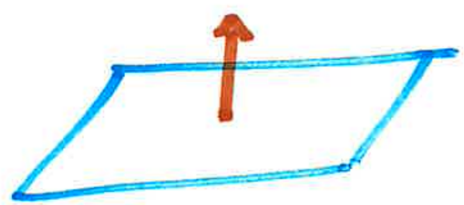
Def: Siano $\Pi = [P; W]$ e $\Sigma = [Q; U]$ due sottospazi lineari. Si dice che $\Pi \perp \Sigma$ (Π ortogonale a Σ) se $W \subseteq U^{\perp}$ oppure $W^{\perp} \subseteq U$.

oss: Sia $\Pi \subseteq EG(n, \mathbb{R})$ un iperpiano di equazione

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + b = 0$$

$\Rightarrow$ il vettore $(a_1 \dots a_n)$ è ortogonale a tutti i vettori del sott. di traslazione di Π.

$$\Pi = [P; W_{n-1}] \Rightarrow W_{n-1}^{\perp} = \mathcal{L}((a_1 \dots a_n))$$



la direzione $\mathcal{L}((a_1 \dots a_n))$ è detta direzione normale all'iperpiano.

[le soluzioni di $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0$ sono $(a_1\ldots a_n)^\perp$]

IDEA: Siano Λ, Ω due insiemi di punti in $EG(n,\mathbb{R})$.

possiamo provare a definire

$$d(\Lambda,\Omega) := \min\{d(\bar{x},\bar{y}) : \bar{x}\in\Lambda, \bar{y}\in\Omega\}.$$

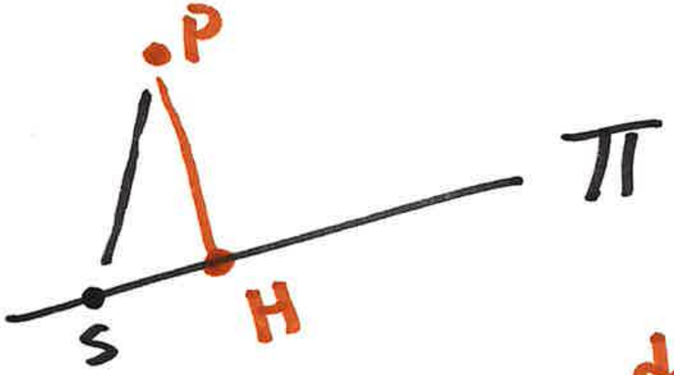
se $\Lambda\cap\Omega\neq\emptyset \Rightarrow d(\Lambda,\Omega)=0$

usiamo questa nozione per insiemi disgiunti.

la nozione funziona bene quando si tratta di distanze del tipo punto/sottospazio.

<u>OSS:</u> Siano P un punto e $\Pi = [Q;W]$ un sottospazio

$\Rightarrow \exists! H \in [Q;W]$ tale che $d(P,H)$ sia minima in $d(P,X)$ con $X \in H$. Tale punto è la proiezione ortogonale di P su Π, ovvero l'intersezione di Π con $[P;W^\perp]$.



$\dim W = t$

$\dim W^\perp = n-t$

OSS 2: $\underbrace{[P;W^\perp]}_{\tilde{W}' \text{ con } \dim \tilde{W}' = n-t+1} \cap \underbrace{[Q;W]}_{\tilde{W} \text{ con } \dim \tilde{W} = t+1}$ è un punto.

ma $\dim(\tilde{W}^\circ) + \dim(\tilde{W}) = n-t+1+t+1 = n+2$

$\Rightarrow$ in $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ i due spazi si intersecano in almeno un punto!

Se essi avessero più di un punto in comune

$\Rightarrow W^\perp \cap W \neq \{\underline{0}\}$ ~~4~~ $\Rightarrow \exists!$ punto di intersezione fra $\tilde{W}^\circ$ e $\tilde{W}$. Tale punto <u>non</u> può essere una direzione (= punto improprio) perché $W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$.

$\Rightarrow$ è un punto affine.

Sia $S \in \pi \Rightarrow d(P,S) = \|\vec{PS}\| = \|\vec{PH} + \vec{HS}\|$

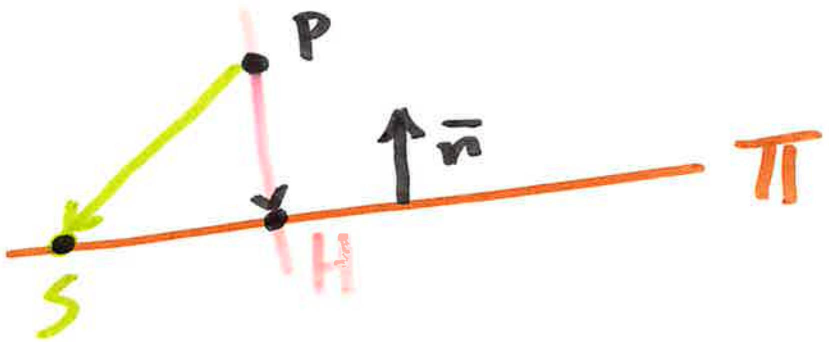
$$\|\vec{PH} + \vec{HS}\|^2 = (\vec{PH} + \vec{HS}) \cdot (\vec{PH} + \vec{HS}) =$$

$\Rightarrow \quad \vec{PH}\cdot\vec{PH} + 2\vec{PH}\cdot\vec{HS} + \vec{HS}\cdot\vec{HS}$ $\qquad \vec{PH} \perp \vec{HS}$

$\Rightarrow \quad = \|\vec{PH}\|^2 + \|\vec{HS}\|^2$

che é minimo $\Leftrightarrow H = S$. $\square$

DISTANZA PUNTO/IPERPIANO.



$\pi: a_1x_2 + \dots + a_nx_n + b = 0$

$P = (p_1 \dots p_n)$.

$\bar{n} = (a_1 \dots a_n)$

$\vec{PH}$ = proiezione di $\vec{PS}$ nella direzione di $\vec{n}$

$$\boxed{\vec{PH} = \frac{\vec{PS}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n}}$$

$\|\vec{PH}\| = \frac{|\vec{PS}\cdot\vec{n}|}{\|\bar{n}\|^2}\cdot\|\bar{n}\| =$

$S = (s_1 \dots s_n) \in \pi$

$$= \frac{|(s_1-p_1)a_1+(s_2-p_2)a_2+\dots+(s_n-p_n)a_n|}{\|\bar{n}\|} =$$

$S \in \pi$

$$= \frac{|\underbrace{s_1a_1+s_2a_2+\dots+s_na_n}_{=-b} - p_1a_1 - \dots - p_na_n|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}} =$$

$$= \frac{|-b-p_1a_1-\dots-p_na_n|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}} = \frac{|a_1p_1+\dots+a_np_n+b|}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}}$$

$n=2$ $\quad r: ax+by+c=0$ $\quad P=(x_P, y_P)$

$$d(P,r) = \frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

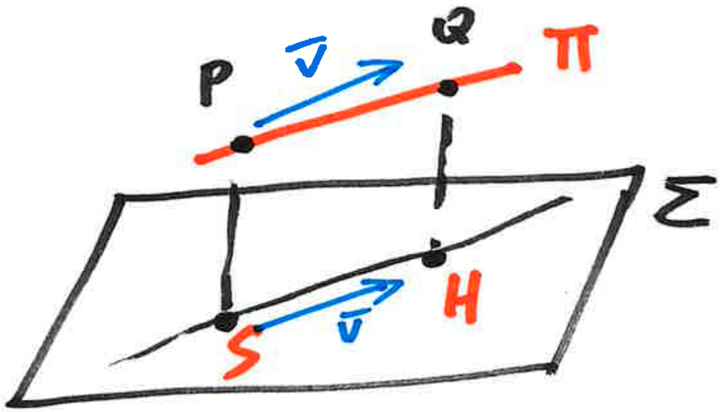
DISTANZA FRA SOTTOSPAZI.

1) I sottospazi sono paralleli

2) I sottospazi non sono paralleli ma nemmeno incidenti

1) Siano $\Pi=[P, \mathcal{U}]$ e $\Sigma=[Q; W]$ con $\mathcal{U} \subseteq W$

$\Rightarrow \forall R \in \Pi : d(R,\Sigma) = d(P,\Sigma)$.



DOBBIAMO FAR VEDERE CHE $\|\vec{QH}\| = \|\vec{PS}\|$ ove H = proiez.$^{\perp}$ di Q su Σ ed S proiez.$^{\perp}$ di P su Σ.

In realtà $\vec{QH} = \vec{PS}$

osserviamo che $Q = P + \bar{v}$ con $\bar{v} \in \mathcal{U} \subseteq W$

sia S la proiezione ortogonale di P su Σ.

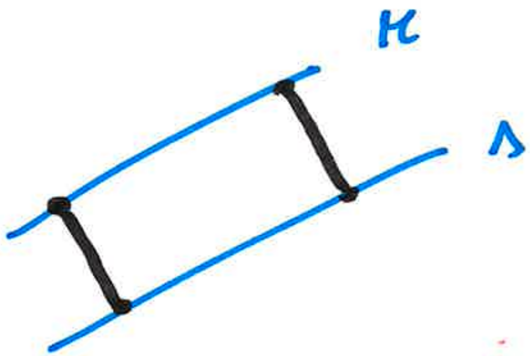
asserisco che $S + \vec{v} = T$ é la proiezione ortogonale di Q su Σ. Innanzi tutto $S + \bar{v}$ é un punto di Σ. calcoliamo ~~$P+\bar{v}$ e $S+\bar{v}$~~

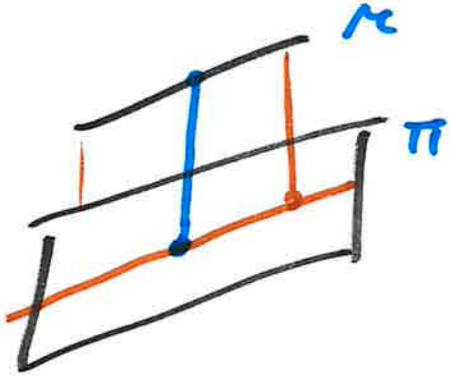
che i vettori $\vec{PS}$ e $(P+\bar{v})\,(S+\bar{v})$ sono paralleli uguali.

$\overrightarrow{PS} = S - V$ in coordinate

$\overrightarrow{(P+\bar{v})(S+\bar{v})} = (S+\bar{v}) - (P+\bar{v}) = S - \bar{V}$

$\Rightarrow (P+\bar{v})(S+\bar{v}) = Q(S+\bar{v})$ ed è un vettore ortogonale a W (perché $\overrightarrow{PS} \perp W$) $\Rightarrow S+\bar{v}$ è proprio la proiezione^H di Q su Σ e $\|QH\| = \|PS\|$.





$n=3$ __rette sghembe__ $r \cap s = \emptyset$

$r \not\parallel s$

__Teorema__

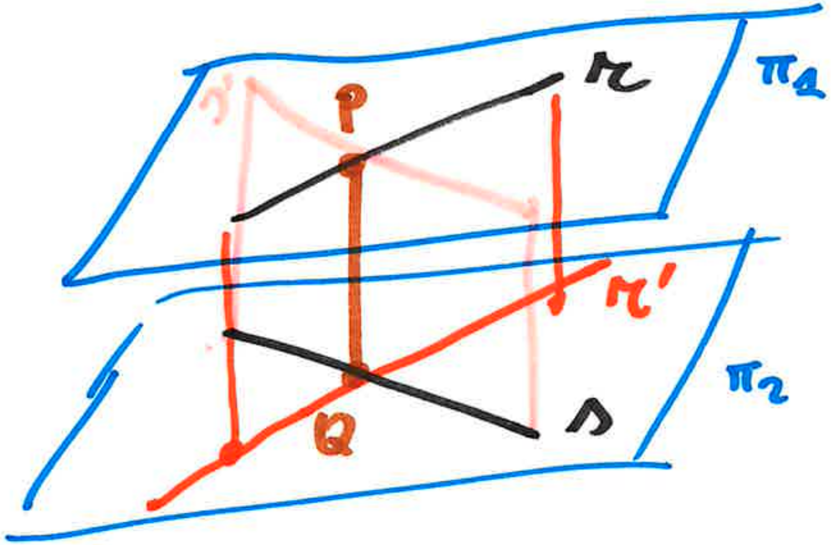
Siano r, s due rette sghembe in $\mathcal{E}G(3, \mathbb{R})$.
Allora $\exists!\, P \in r$ e $Q \in s$ tali che
$d(r, s) = d(P, Q)$ e il vettore $\vec{PQ}$ è
ortogonale sia ad r che ad s.

La retta per PQ è detta __retta di minima__ distanza fra r ed s.

$r = [R; \mathcal{U}_1]$ $\quad s = [S, W_1]$ $\quad \mathcal{U}_1 \cap W_1 = \{\underline{0}\}$

osserviamo che $\quad r \subseteq \pi_1 = [R; \mathcal{U}_1 + W_1]$ $\quad \pi_1 // \pi_2$

$s \subseteq \pi_2 = [S; \mathcal{U}_1 + W_1]$ $\quad \pi_1 \cap \pi_2 = \phi$



$d(r, s) \geq d(\pi_1, \pi_2)$

$\min\{d(P,Q) \mid P \in r, Q \in s\} \geq \min\{d(P,Q) \mid P \in \pi_1, Q \in \pi_2\}.$

Mostriamo che $\exists P \in r, Q \in s : d(P,Q) = d(\pi_1, \pi_2).$

Sappiamo che $d(\pi_1, \pi_2) = \|\overrightarrow{XY}\|$ tale che $X \in \pi_1$, $Y \in \pi_2$ e $\overrightarrow{XY} \in (U_1 + W_1)^\perp$

ci basta dimostrare che $\exists P \in r$ $\exists Q \in s$ tali che $\overrightarrow{PQ} \in (U_1 + W_1)^\perp$

Sia r' la proiezione ortogonale di r su π_2 cioè la retta che si ottiene proiettando ortogonalmente ogni punto di r su π_2. $\rightarrow$ <u>OSS</u>: $r' \subseteq \pi_2$ è una retta parallela a r $\Rightarrow$ $r' \subseteq \pi_2$ non è parallela ad s $\Rightarrow$ $r' \cap s = Q$ con Q proiezione ortogonale di P su π_2 $\Rightarrow$ il punto Q e la sua preimm. in r sono rispettivamente i punti di r ed s a minima distanza!

OSS: Siano $\pi = [P, \mathcal{U}]$ e $\Sigma = [Q; W]$ con

$\mathcal{U} \subseteq W$.

Allora la proiezione ortogonale di π su Σ

è $[\varphi(P); \mathcal{U}]$ con $\varphi(P)$ proiezione

ortogonale di P.

DIM: la stessa che fa vedere che $\forall$ punto di π è

alla stessa distanza da W. #

luogo dei punti di $\mathcal{E}G(2,\mathbb{R})$ a distanza 1 da $(0,0)$.

$x^2 + y^2 = 1$ 

__$n=2$__ : Sia $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ un polinomio in x e y non costante a coeff. reali.

Si dice curva algebrica ~~[illegible]~~ di equazione

$f(x,y)=0$

l'insieme dei punti di $EG(2,\mathbb{R})$ dato da

$$V(f) := \{(x,y) \mid f(x,y)=0\}.$$

__Def__: Si dice __equazione omogenea__ della curva $f(x,y)=0$ l'equazione

$$F(x_1, x_2, x_3) := x_3^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = 0$$

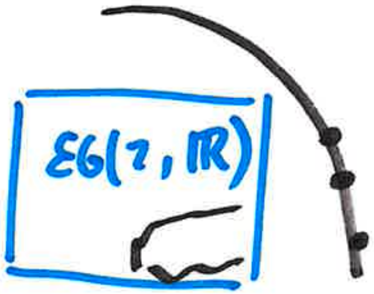
e si indica con $\tilde{V}(f) := \{[(x_1,x_2,x_3)] : F(x_1,x_2,x_3)=0\}$
$\subseteq \mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

__OSS:__ Sia $P=(x_P, y_P) \in V(f) \Rightarrow$

$$\Rightarrow [(x_P, y_P, 1)] \in \tilde{V}(F)$$

Viceversa: sia $[(x_1\ x_2\ x_3)] \in \tilde{V}(F)$ con $x_3 \neq 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) \in V(f).$$



I punti di $\tilde{V}(F)$ del tipo $[(x_1, x_2, 0)]$ sono detti __punti impropri__ della curva algebrica.

__OSS:__ Una retta è una curva algebrica del I ordine, cioè con eq. di grado $= 1$.

Def: Sia $f(x,y)=0$ un polinomio non costante.

Si dice <u>ordine</u> della curva algebrica $V(f)$ oppure $\tilde{V}(F)$ il grado del polinomio f.

⚠ Il polinomio F è omogeneo, cioè tutti i monomi che vi compaiono hanno lo stesso grado ed è uguale al grado di f.

<u>N.B</u>: Se $F(x_1, x_2, x_3) = 0 \iff F(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = 0 \quad \alpha \neq 0$.

Siano $f(x,y)$ e $g(x,y)$ due polinomi non costanti:

$$\Rightarrow \quad V(f \cdot g) = V(f) \cup V(g)$$

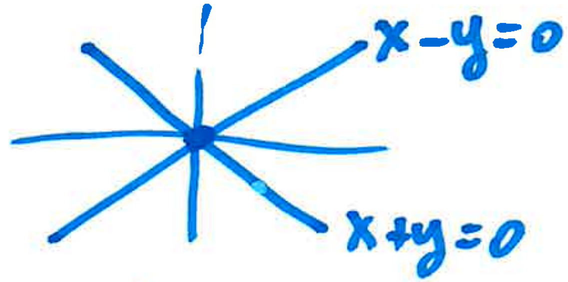
infatti $V(f \cdot g) = \{(x,y) : f(x,y) \cdot g(x,y) = 0\} =$

$= \{(x,y) : f(x,y) = 0\} \cup \{(x,y) : g(x,y) = 0\}.$

Def: Una curva algebrica è detta <u>irriducibile</u> se la sua equazione $f(x,y)=0$ non si fattorizza nel prodotto di 2 equazioni di grado minore. <u>Riducibile</u> altrimenti

$(x^2-y^2)=0$ è riducibile

$(x+y)(x-y)=0$



$x^2+y^2-1=0$

irriducibile

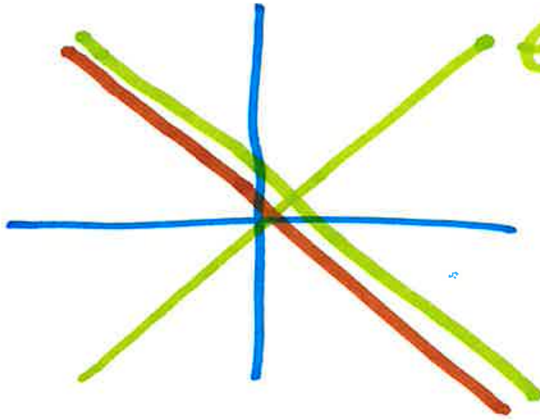
Supponiamo ora di avere 2 curve algebriche

$\mathcal{C}_1 \quad (x+y)^3 = 0$

$\mathcal{C}_2 \quad (x^2 - y^2) = 0$

$\mathcal{C}_2 = V(x+y) \cup V(x-y)$

$\mathcal{C}_1 = V(x+y)$



Se $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2 \Rightarrow$ VORREMMO vale che le componenti irriducibili di $\mathcal{C}_1$ hanno equazioni che dividono le equazioni di $\mathcal{C}_2$.

su $\mathbb{R}$ non funziona.

$\mathcal{C}_3 : (x^2+y^2+1) = 0 \quad V(f) = \emptyset$

CI SERVE LAVORARE SU $\mathbb{C}$.

Su $\mathbb{C}$ valgono delle proprietà generali ~~per~~

Teorema dell'ordine: Sia $F(x_1\, x_2\, x_3)$ un polinomio omogeneo di grado n a coeff. in $\mathbb{C}$. Allora ogni retta di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ interseca $\mathcal{V}(F)$ in esattamente n punti (contati con la debita molteplicità) o è in esso contenuta.

OSS: DIMOSTRAZIONE SBAGLIATA $\mathcal{C}: f(x,y)=0$ in ambito affine $\deg f = n$

$r: y = ax+b$

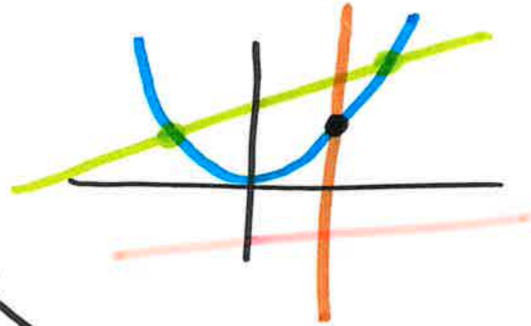
Considero $g(x) = f(x, ax+b)$. Le radici di $g(x)$ sono i punti di intersezione.

$\deg g(x) \leq n$

$\Rightarrow \exists$ al più n radici di $g(x)$.

Se siamo su $\mathbb{R}$ nulla ci garantisce che siano n radici in $\mathbb{R}$!

y_∞



$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -1 \end{cases}$

$x = \pm i$

$\mathcal{C}$: $y - x^2 = 0$

$y - x^2 = 0 \rightarrow x_3^2\left(\frac{x_2}{x_3} - \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2\right) = 0$

$\downarrow$

$\rightarrow x_3 x_2 - x_1^2 = 0$

$x = 1$

$y = x^2 = 1$

$x = 1 \rightarrow x_1 = x_3$

$\begin{cases} x_3 x_2 - x_1^2 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$

$x_3(x_2 - x_1) = 0$ → $[(1\ 1\ 1)] = P$; → $[(0\ 1\ 0)] = Q_\infty$