



Algebra e Geometria

Terzo Appello - 25/03/2024

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

A) Sia $\mathcal{V} := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2,3} : A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Si determini una base (se esiste) di \mathcal{V} e si determinino (se possibile) le coordinate di $B := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto ad essa. Quali sono i possibili ranghi degli elementi di \mathcal{V} ?

B) Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

C) In $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ si determini (se esiste) un piano reale che contenga la retta $x + iy = 0 = x - iy + z$.

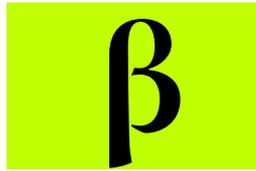
D) Si discuta al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità del seguente sistema lineare, precisandone il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = 0 \\ x + (3+k)z = k+3 \\ x + y = -2. \end{cases}$$

E) Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{C}$ i due sottospazi vettoriali $\mathcal{U} := \{f \in \mathbb{C}[x]_{\leq 3} : f(k) = f(0) = 0\}$, $\mathcal{V} := \{f \in \mathbb{C}[x]_{\leq 3} : f(i) = f(1) = 0\}$ sono in somma diretta.

F) Si determini una conica \mathcal{C} passante per i punti $[(1, i, 1)]$, $[(1, i, 0)]$ e $[(0, 0, i)]$ e se ne indichi il tipo.

G) In $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ scriva la proiezione ortogonale del punto $P = (2, 2, 4)$ sul piano $x - 2z = 0$.



Algebra e Geometria

Terzo Appello - 25/03/2024

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

A) Sia $\mathcal{V} := \left\{ A \in \mathbb{R}^{3,2} : A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Si determini una base (se esiste) di \mathcal{V} e si determinino (se possibile) le coordinate di $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ rispetto ad essa. Quali sono i possibili ranghi degli elementi di \mathcal{V} ?

B) Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

C) In $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ si determini (se esiste) un piano reale che contenga la retta $x - y + 2iz = 0 = x + 4y - iz$.

D) Si discuta al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità del seguente sistema lineare, precisandone il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} x - (k + 1)y - 2z = 0 \\ x - (3 + k)z = k + 3 \\ x - y = -2. \end{cases}$$

E) Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{C}$ i due sottospazi vettoriali $\mathcal{U} := \{f \in \mathbb{C}[x]_{\leq 3} : f(k) = f(i) = 0\}$, $\mathcal{V} := \{f \in \mathbb{C}[x]_{\leq 3} : f(2) = f(0) = 0\}$ sono in somma diretta.

F) Si determini una conica \mathcal{C} passante per i punti $[(1, i, 1)]$, $[(2, i, 0)]$ e $[(0, 0, -i)]$ e se ne indichi il tipo.

G) In $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ scriva la proiezione ortogonale del punto $P = (1, 2, 1)$ sul piano $x - z = 4$.



Algebra e Geometria

Terzo Appello - 25/03/2024

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

A) Sia $\mathcal{V} := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2,3} : A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Si determini una base (se esiste) di \mathcal{V} e si determinino (se possibile) le coordinate di $B := \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ rispetto ad essa. Quali sono i possibili ranghi degli elementi di \mathcal{V} ?

B) Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ -1 & 4 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

C) In $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ si determini (se esiste) un piano reale che contenga la retta $ix - iy = 0 = x + 4y + 3z - i$.

D) Si discuta al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità del seguente sistema lineare, precisandone il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} x + (k-1)y + 2z = 0 \\ x + (1+k)z = k+1 \\ x + y = -2. \end{cases}$$

E) Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{C}$ i due sottospazi vettoriali $\mathcal{U} := \{f \in \mathbb{C}[x]_{\leq 3} : f(2i) = f(k+i) = 0\}$, $\mathcal{V} := \{f \in \mathbb{C}[x]_{\leq 3} : f(1) = f(2) = 0\}$ sono in somma diretta.

F) Si determini una conica \mathcal{C} passante per i punti $[(1, i, 1)]$, $[(0, i, 0)]$, $[(i, 0, 0)]$ e $[(0, 0, i)]$ e se ne indichi il tipo.

G) In $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ scriva la proiezione ortogonale del punto $P = (1, 2, 3)$ sul piano $x + y + z = 1$.



Algebra e Geometria

Terzo Appello - 25/03/2024

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

A) Sia $\mathcal{V} := \left\{ A \in \mathbb{R}^{3,2} : A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Si determini una base (se esiste) di \mathcal{V} e si determinino (se possibile) le coordinate di $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ rispetto ad essa. Quali sono i possibili ranghi degli elementi di \mathcal{V} ?

B) Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ -1 & 5 & 0 \\ k & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

C) In $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ si determini (se esiste) un piano reale che contenga la retta $x - iy + iz + 2 = 0 = x + 2iy - 2iz + 3$.

D) Si discuta al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità del seguente sistema lineare, precisandone il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} x + 2y + (k - 1)z = 0 \\ x + (1 + k)y = k + 1 \\ x + z = -2. \end{cases}$$

E) Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{C}$ i due sottospazi vettoriali $\mathcal{U} := \{f \in \mathbb{C}[x]_{\leq 3} : f(k) = 0\}$, $\mathcal{V} := \{f \in \mathbb{C}[x]_{\leq 3} : f(1) = f(2) = f(i) = 0\}$ sono in somma diretta.

F) Si determini una conica \mathcal{C} passante per i punti $[(0, i, 1)]$, $[(1, 2i, 0)]$ e $[(0, 0, i)]$ e se ne indichi il tipo.

G) In $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ scriva la proiezione ortogonale del punto $P = (3, 2, 1)$ sul piano $x + y - z = 1$.
