Svolgimento del determinare quando le possibili intersezioni dei tre piani nell'esercizio C sono reali.

Esercizio C/d : punti reali.

$(000) \in \pi_k \cap \vartheta_k \qquad (000) \notin \sigma_k$

Sia (a,b,c) reale in $\pi_k \cap \vartheta_k \cap \sigma_k$

allora
$$a = -kb - 2ic \in \mathbb{R}$$
$$a = +kb - 2kc \in \mathbb{R}$$

Ne segue
$$(-kb-2ic) = (-\bar{k}b+2ic)$$
$$(kb-2kc) = (\bar{k}b-2\bar{k}c)$$

cioè
$$(\bar{k}-k)b = 4ic$$
$$(\bar{k}-k)b = 2(\bar{k}-k)c$$

→ ne segue
$$k=-i \Rightarrow \pi_k \cap \theta_k \cap \sigma_k = \{(0,-8,-4)\}$$

oppure
$$\bar{k}-k=0 \Rightarrow k \in \mathbb{R}, c=0$$

ma i punti reali di questo tipo devono soddisfare $(a,b,c)=(0,-4,0)$.

Questo appartiene ai 3 piani solo per k=0.

Risposta: $k \in \{-i, 0\}$

Esercizio C/β: punti reali

- Si considerino i punti reali di ϑ_k. Sono tutti sulla retta

$$\begin{cases} y+2z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

Intersecando con σ_k si ha

$$(0,4,-2)$$

L'intersezione dei 3 piani è un punto reale se tale punto è in π_k, per cui

$$4\cdot k-4k=0$$

cioè sempre.

Risposta: $\forall k \in \mathbb{C}$

Esercizio C/8 : punti reali

- Se $k \in \mathbb{R} \Rightarrow$ i tre piani sono reali e dunque pure la loro intersezione lo è

(N.B. per k reale i piani sono sempre in una stella propria)

- Se $k \notin \mathbb{R} \Rightarrow$ dall'equazione di π_k si deduce che un punto reale deve soddisfare $y=0$ e da quella di σ_k $x=-4$

pertanto l'intersezione dei 3 piani è reale solo se è un punto $(a,b,c)=(-4,0,c)$

con $-4-2kc=0$ con $k \notin \mathbb{R}$

ma questa eq. ha solo una sol reale $\Rightarrow$ ~~cy~~.

Risposta: $\forall k \in \mathbb{R}$

Esercizio C/S: punti reali

Sia (a,b,c) un punto reale in

$\pi_k \cap \vartheta_k \cap \sigma_k$.

Allora $(a,b,c) \in \pi_k \cap \sigma_k$ e dunque

$$\begin{cases} b = -4-a & \text{da } \sigma_k \\ 2a+4-2ikc = 0 & \text{da } \vartheta_k \end{cases}$$

Dunque $c=0$ oppure $k = \alpha i, \alpha \in \mathbb{R}$.

- Se $k = \alpha i$ i 3 piani sono reali $\Rightarrow$ intersezione reale

(n.b: per tali valori sono sempre in una stella propria)

- Se $c=0 \Rightarrow$ cerchiamo punti del tipo $(a, -4-a, 0)$.

sostituendo nella eq. di π_k

$$i(a) + k(-4-a) = 0$$

da cui $(i-k)a = -4k$. Se $k = i$ ricadiamo nel caso precedente.

Altrimenti,

$$a = \frac{4k}{i-k} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{4k}{i-k} = \frac{4\overline{k}}{-i-\overline{k}} \Rightarrow (-i-\overline{k})k = (i-k)\overline{k}$$

Da cui si deduce nuovamente $\overline{k} = -k \Rightarrow k = \alpha i, \alpha \in \mathbb{R}$

$\square$

Risposta: $\quad k \in \{\alpha i : \alpha \in \mathbb{R}\}$