Spazio Affine $\longrightarrow$ Ampliamento proiettivo

$AG(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{K} = \tilde{A}_n(\mathbb{K})$

$PG(n, \mathbb{K})$

$\mathbb{P}\,\mathbb{K}^{n+1}$

passaggio a coordinate omogenee.

$$f(X_1 \dots X_n) \longrightarrow X_{n+1}^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_{n+1}} \dots \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) =$$

$$= F(x_1 \dots x_{n+1}).$$

$$x^2+2y+5=0 \longmapsto x_3^2\left(\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2+2\frac{x_2}{x_3}+5\right)=$$

$$=x_1^2+2x_2x_3+5x_3^2$$

$\longleftarrow$

dividiamo per $x_3 \neq 0$ e poniamo $x=\frac{x_1}{x_3}$ $y=\frac{x_2}{x_3}$

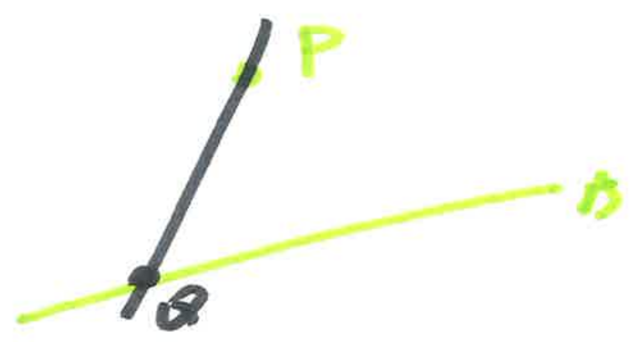
SOTTOSPAZI AFFINI $\longrightarrow$ SOTTOSPAZI VETTORIALI / PROIETTIVI

NON VENGONO DA PUNTI, RETTE, PIANI ~~AF~~FINI MA CORRISPONDONO AD (INSIEMI DI) DIREZIONI	punti impropri retta impropria piano improprio

OSS: Esiste una biiezione fra i punti di una retta e le rette di un FASCIO.

Esiste una biiezione fra le rette di una stella e i punti di un piano.

$n=3$

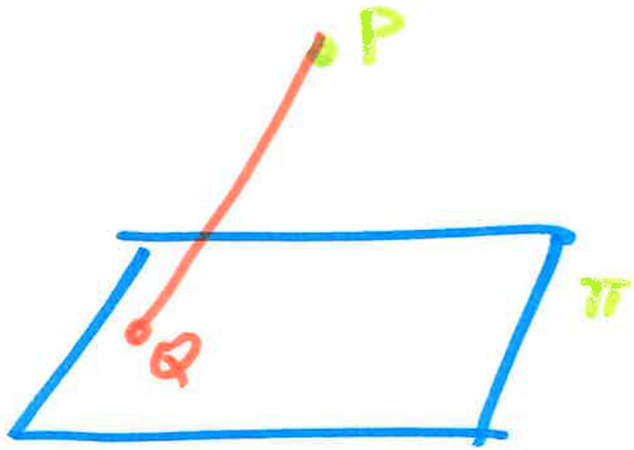


P punto $\quad P \notin s$

s retta

$\Rightarrow \forall$ retta per P interseca s in un punto

Viceversa: $\forall$ punto $Q \in s$ $\exists!$ retta PQ passante per P.



$P \notin \pi$

in $\mathbb{P}^3\mathbb{K}$ ogni retta per P interseca π in un punto e viceversa $\forall$ punto di π $\exists!$ retta per esso e per P.

Sia $r_0 = PQ$ con $Q \in \pi$. Se Q è un punto proprio

$\Rightarrow PQ$ è incidente π anche in $AG(3,\mathbb{K})$.

Se Q è un punto improprio, questo significa che la direzione di PQ è contenuta nella giacitura di $\pi \Rightarrow PQ // \pi$

$AG(n, \mathbb{K})$ geometria affine su $\mathbb{K}$ $\hookrightarrow$ $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$

$\downarrow$

geometria metrica
in cui è definita
la nozione di distanza.

$d: A \times A \to \mathbb{R}$ distanza

1) $\forall P, Q \in A: d(P,Q) = d(Q,P)$
2) $\forall P, Q \in A: d(P,Q) \geq 0$ e $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$
3) $\forall P, Q, R \in A: d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$
(disuguaglianza triangolare).

A priori di distanze se ne posso definire molte.

Es. Se $A = \mathbb{K}^n \Rightarrow$

$$d_H(\bar{x}, \bar{y}) := |\{ i \mid x_i \neq y_i \}|.$$

distanza di Hamming.

$$d_{\neq}(P, Q) := \begin{cases} 0 & \text{se } P = Q \\ 1 & \text{se } P \neq Q \end{cases}$$

Supponiamo ora che $AG(n, \mathbb{K}) = (A, V_n(\mathbb{R}), f)$

con $V_n(\mathbb{R})$ spazio vettoriale normato.

$\exists$ una norma su $V_n(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ $d(P, Q) := \| \overrightarrow{PQ} \|$ é una distanza.

Uno spazio ~~vettoriale~~ affine con una distanza d
è detto spazio metrico

Ogni spazio affine normato (i.e. con sp. vett. associato con norma) è uno spazio metrico.

Ogni spazio affine con sp. vettoriale associato euclideo ha un prod. scalare definito positivo ⇒ è anche uno sp. normato ⇒ ⇒ è anche uno spazio metrico.

Euclideo ⇒ NORMATO ⇒ METRICO.

Def.: Uno spazio affine $AG(n, \mathbb{R})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ è detto spazio euclideo $EG(n, \mathbb{R})$ se fra i vettori dello s. vettoriale associato è definito un prod. scalare definito positivo.

In questo caso si pone $d(P, Q) := \|\vec{PQ}\| = \sqrt{\vec{PQ} \cdot \vec{PQ}}$

Def.: Siano $\Theta = [P; W]$ e $\Sigma = [Q; U]$ due sottospazi di $EG(n, \mathbb{R})$.

Si dice che $\Theta \perp \Sigma$ (Θ ortogonale a Σ) se $W \subseteq U^\perp$ oppure $W^\perp \subseteq U$.

$$W \subseteq U^\perp \Updownarrow U \subseteq W^\perp \qquad W^\perp \subseteq U \Updownarrow U^\perp \subseteq W$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$. $\qquad EG(n, \mathbb{K})$.

La funzione distanza è definita fra i punti.

Se Σ e Θ sono due sottospazi vorremmo

$$d(\Sigma, \Theta) = \min \{ d(P, Q) : P \in \Sigma, Q \in \Theta \}.$$

Definizione che va bene se $\Sigma \cap \Theta = \emptyset$ o $\Sigma \subseteq \Theta$ o $\Theta \subseteq \Sigma$

$$\Sigma \cap \Theta \neq \emptyset \Rightarrow \exists P \in \Sigma \cap \Theta \Rightarrow d(\Sigma, \Theta) = d(P, P) = 0$$:(

Sia $\Sigma = [Q; W]$ un sottospazio. e sia P un punto. Quali sono i punti di Σ a distanza minima da P?

__Teorema__: Il punto $P' \in \Sigma$ a distanza minima da P è la proiezione ortogonale di P su Σ ovvero l'unico punto $P' \in \Sigma \cap [P; W^{\perp}]$

1) $[P; W^{\perp}] \cap [Q; W]$ é un punto P'
2) $d(P', P) \leq d(R, P) \quad \forall R \in \Sigma$
3) $d(P', P) = d(R, P)$ con $R \in \Sigma \Rightarrow R = P$

__DIM__: $[Q; W]$ corrisponde in $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ ad uno spazio $\tilde{W}$ di dim $\dim \Sigma = k+1$

$[P; W^{\perp}]$ corrisponde in $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ ad uno spazio di dim $(n-k)+1 = n-k+1$ $\tilde{W}$.

$$\dim \tilde{W} + \dim \tilde{W}^{\circ} = k+1 + (n-k+1) =$$
$$= n+2 > n+1$$

in uno spazio $\mathbb{P}^n\mathbb{R} = \mathbb{P}\mathbb{R}^{n+1}$

$\Rightarrow \tilde{W} \cap \tilde{W}^{\circ} \neq \{\underline{0}\}$ e dunque i 2 sottospazi $[Q; W]$ e $[P; W^{\perp}]$ si intersecano in $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$

consideriamo come sono generati:

$$\tilde{W} = \mathcal{L}\left((\bar{w}_1\ 0), (\bar{w}_2\ 0) \dots (\bar{w}_k\ 0), (\bar{q}\ 1) \right)$$
$$\tilde{W}^{\circ} = \mathcal{L}\left((\bar{b}_1\ 0) \dots (\bar{b}_{n-k}\ 0), (\bar{P}\ 1) \right)$$

$$\tilde{W} = (W_0) + \mathcal{L}((\bar{q}\ 1)) \qquad \text{ove } W_0 = \{(w_1 \dots w_n\ 0) \mid (w_1 \dots w_n) \in W\}.$$

$$\tilde{W}^\circ = (W^\perp_0) + \mathcal{L}((\bar{p}\ 1)) \qquad W^\perp_0 = \{(w_1 \dots w_n\ 0) \mid (w_1 \dots w_n) \in W^\perp\}.$$

se esistesse una soluzione di $\tilde{W} \cap \tilde{W}^\circ$ con $x_{n+1} = 0 \Rightarrow$ tale soluzione dovrebbe essere del tipo $(s_1 \dots s_n\ 0)$ con $(s_1 \dots s_n) \in W^\perp \cap W \Rightarrow$ essa è $\underline{0}$.

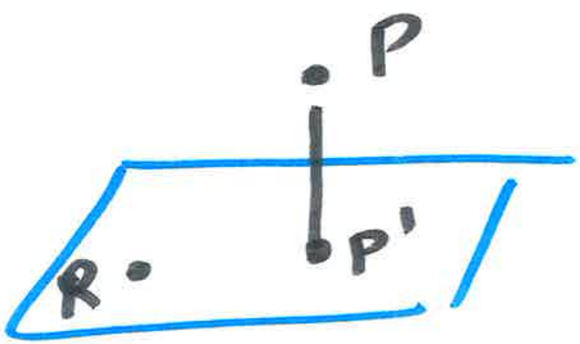
ma noi sappiamo che $\tilde{W} \cap \tilde{W}^\circ$ si intersecano in un punto $\Rightarrow$ deve essere un punto con $s_n \neq 1 \Rightarrow$ é un punto proprio!

Tutte le intersezioni fra $\tilde{\omega}$ e $\tilde{\omega}^{\circ}$ sono proprie.

OSSERVIAMO CHE GLI UNICI SOTTOSPAZI PRIVI DI PUNTI IMPROPRI SONO I PUNTI

$\Rightarrow$ il sottospazio $\tilde{\omega} \cap \tilde{\omega}^{\circ}$ deve essere un solo punto.

$\rightarrow$ La proiezione ortogonale di P su Σ è uno ed un solo punto proprio P'.



$R \in \Sigma$

Calcoliamo $d(P,R)^2 = \|\overrightarrow{PR}\|^2 =$

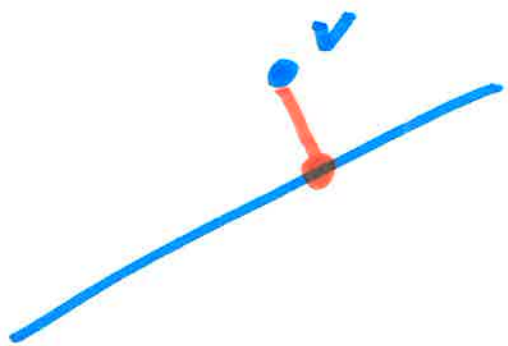
$$= \|\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'R}\|^2 =$$

$$= (\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'R}) \cdot (\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'R}) =$$

$$= \|\overrightarrow{PP'}\|^2 + 2\overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{P'R} + \|\overrightarrow{P'R}\|^2$$

ma $\overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \Rightarrow d(P,R)^2 = \|\overrightarrow{PP'}\|^2 + \|\overrightarrow{P'R}\|^2$

questo è minima $\Leftrightarrow R = P'$ $\square$



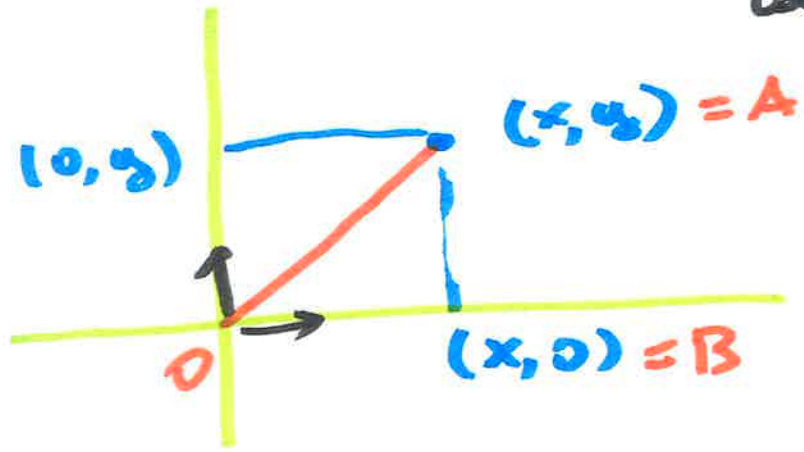
__Def:__ Sia $EG(n,\mathbb{R})$ uno spazio euclideo.
Si dice <u>riferimento euclideo</u> un riferimento affine $\Gamma = (O, \mathcal{B})$ ove $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di $V_n^0(\mathbb{R})$.

Rispetto un riferimento euclideo la matrice del prodotto scalare è la matrice identica.

$$\Rightarrow (x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$\|(x_1 \dots x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}$$

con riferimento euclideo.



$$d(O,A)^2 = x^2 + y^2 = d(O,B)^2 + d(B,A)^2$$

DISTANZA PUNTO/IPERPIANO

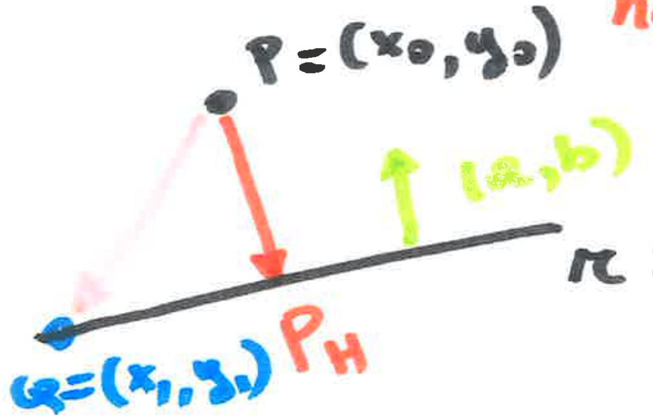
$n=2$ DISTANZA PUNTO/RETTA.

FISSATO UN RIF. EUCLIDEO.

$r: \ ax+by+c=0$ retta in $EG(2,\mathbb{R})$

$r_\infty = \mathcal{L}((\ell, m))$ $\quad (\ell, m)$ soddisfa $a\ell + bm = 0$

$= (a,b)^\perp$ $\quad \bar{n} = (a,b)$ è detto vettore normale alla retta.



$d(P,r) = \|\overrightarrow{PP_H}\|$ con P_H proiezione ortogonale di P su r.

$Q \in r$ $\quad Q = (x_2 \ y_2)$ $\quad ax_1 + by_1 = -c$

$\overrightarrow{PP_H}$ é la proiezione su $\bar{n}$ del vettore $\overrightarrow{PQ}$

$$\overrightarrow{PP_H} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} \bar{n}$$

$$\frac{(x_1 - x_0 \quad y_1 - y_0) \cdot (a, b)}{a^2 + b^2} (a, b)$$

$$= (a, b) \frac{ax_1 - ax_0 + by_1 - by_0}{a^2 + b^2} =$$

$$= \frac{-ax_0 - by_0 - c}{a^2 + b^2} (a, b)$$

calcolo la norma

$$\left|\frac{-ax_0-by_0-c}{a^2+b^2}\right| \cdot \|(a,b)\| =$$

$$= \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

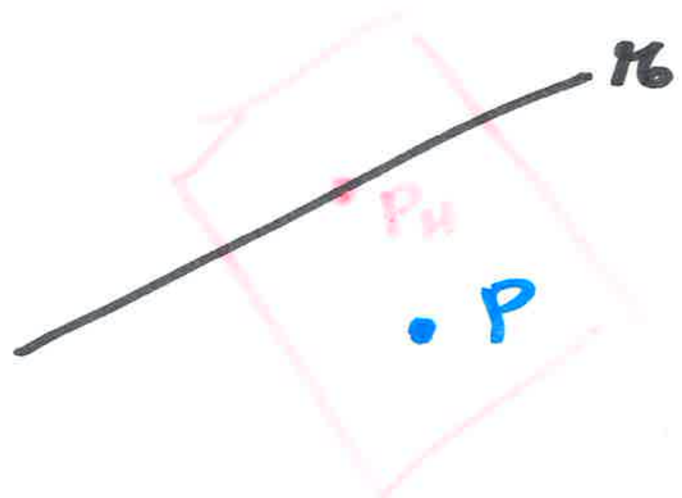
Formula analoga (dimostrazione analoga) anche per $n>2$.

$\Sigma: \ a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n+b=0$

$P=(p_1 \dots p_n) \qquad (a_1 \dots a_n)=\bar{n}$

$$d(P,\Sigma) = \frac{|a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

<u>OSS:</u> e la distanza punto/retta nello spazio?



$$r \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

$P = (x_0\ y_0\ z_0)$.

1) TROVIAMO PER P il piano ortogonale ad r.
2) TROVIAMO P_H proiezione di P su r
3) calcoliamo $\|PP_H\|$.

$$[(a\ b\ c) \times (a'\ b'\ c')] \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$\uparrow$

piano per P ortogonale ad r.

OSSERVIAMO CHE $(a, b, c) \times (a'\ b'\ c')$ è esattamente un vettore che risolve i sistemi omogenei associati ai 2 piani che definiscono la retta $\Rightarrow$ direzione (l, m, n) della retta.

Un piano $\perp$ alla retta deve avere ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ giacitura con vettori (s, t, u)

tali che $(s\ t\ u)\cdot(\ell\ m\ n)=0$

e quindi equazione del tipo

$$\ell x + my + nz + k = 0 \qquad k\in\mathbb{R}$$

D'altro canto se il piano passa per

$$(x_0\ y_0\ z_0) \Rightarrow$$

$$k = -\ell x_0 - m y_0 - n z_0 \qquad \square$$