- Siano $P = (x_0, y_0)$, $Q = (x_1, y_1)$ due punti distinti $\Rightarrow$ la retta per P e Q ha equazione

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Siano $P = (x_0 y_0)$ ed $V_1 = \mathcal{L}((l, m))$. $\Rightarrow$ la retta per P e di direzione V_1 ha equazione

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ l & m & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ l & m & 0 \end{vmatrix} = 0$$

π piano $\quad P = (x_0 \ y_0 \ z_0)$ $\quad R \notin \overline{PQ}$

$Q = (x_1 \ y_1 \ z_1)$

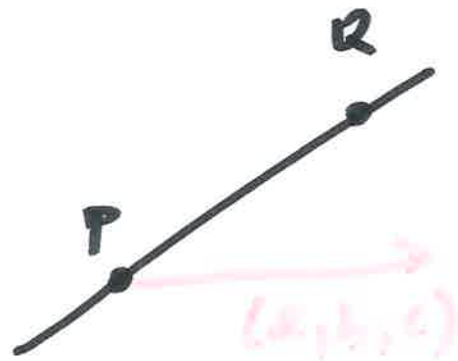
$R = (x_2 \ y_2 \ z_2)$

$V_2 = \mathcal{L}((a \ b \ c), (d \ e \ f)) \quad rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 2.$

- PIANO PER PQR $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

- PIANO PER PQ e appartenente alla stella impropria di centro $\mathcal{L}((a \ b \ c))$, con (a, b, c) NON DIREZIONE DI $\overline{PQ}$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$



- PIANO PER P e di giacitura generata da $(a\ b\ c)$ e $(d\ e\ f)$

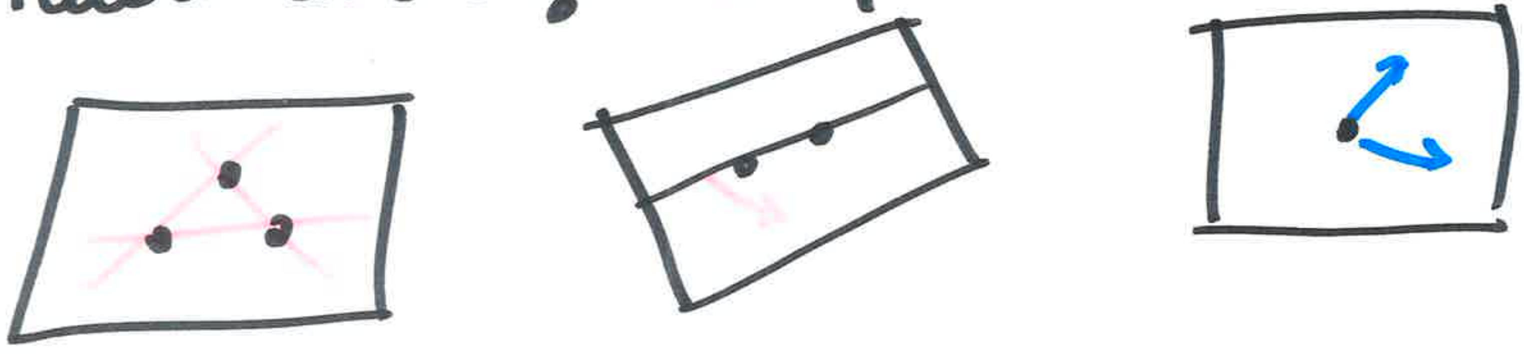
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff rk\,(\text{matrice}) = 3 \iff \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{per righe}]{} \begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \end{pmatrix} .$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \end{pmatrix}$$

nelle equazioni possiamo vedere che le direzioni hanno un ruolo analogo ai punti.



__$n=2$__ : Nel piano affine due rette o si intersecano o sono parallele

→ due rette distinte o hanno in comune 1 punto

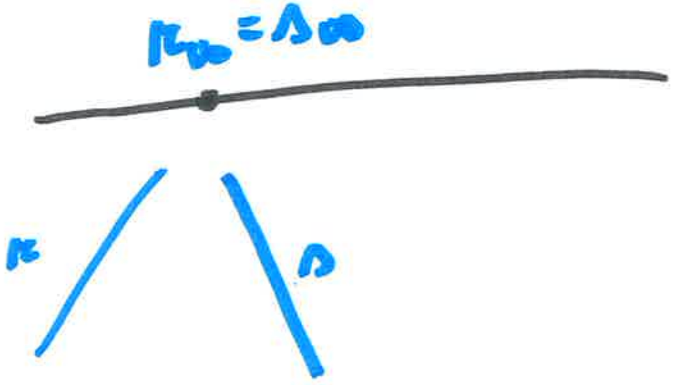
o hanno in comune 1 direzione.

VORREMMO IDENTIFICARE LE DIREZIONI DELLE RETTE CON "PUNTI" OPPORTUNI

__Def:__ Si dicono punti propri di $AG(n, \mathbb{K})$ tutti i punti dello spazio affine. Si dicono punti impropri le direzioni delle rette ovvero i sottospazi 1-dimensionali dello sp. vett. associato alla geometria affine.

PUNTI IMPROPRI = PUNTI ALL'INFINITO.

Due rette distinte in $\overline{AG(2,\mathbb{K})}$ si intersecano sempre in un punto $<$ proprio se incidenti / improprio se parallele.



Sia $V_{n+1}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione $(n+1)$.

Diciamo spazio proiettivo di dimensione n associato a V, indicato come $\mathbb{P}V_{n+1}$ oppure $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ la struttura in cui i punti sono i sottospazi 1-dimensionali di V e le rette sono i sottospazi 2 dimensionali di V.

Consideriamo $AG(n, \mathbb{K})$ geometria affine e prendiamo $V_{n+1} = \mathbb{K}^{n+1}$

fissato un riferimento affine, consideriamo la corrispondenza che manda ogni equazione del tipo $\boxed{f(X_1, \dots X_n) = 0}$ in $AG(n, \mathbb{K})$ nell'equazione $\cancel{X}$ $\boxed{x_{n+1}^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_{n+1}} \dots \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = 0}$

Ad ogni oggetto associato ad un sistema di eq. in $AG(n, \mathbb{K})$ facciamo corrispondere la collezione delle corrispettive autosoluzioni in $\mathbb{P}\mathbb{K}^{n+1}$

$n=2 \quad AG(2,\mathbb{K})$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}^2\mathbb{K} = \mathbb{P}\mathbb{K}^3$

$$ax+by+c=0 \longrightarrow x_3\left(a\frac{x_1}{x_3}+b\frac{x_2}{x_3}+c\right)=0$$

$$ax_1+bx_2+cx_3=0$$

$$(a,b)=P \longrightarrow \mathcal{L}((a\ b\ 1))$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} x_1=ax_3 \\ x_2=bx_3 \end{array} \quad x_3\neq 0$$

$$\mathcal{L}((a\ b\ 1)).$$

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ \cancel{a'x+b'y+c} \\ ax+by+c'=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ ax_2+bx_2+c'x_3=0 \end{cases}$$

$$c\neq c'$$

$$\begin{cases} x_3=0 \\ (x_1,x_2)=\lambda(b,-a) \end{cases}$$

$$\mathcal{L}((b,-a,0))$$

Il punto $[(b,-a,0)]$ corrisponde alla direzione delle 2 rette che è $\mathcal{L}((b,-a))$.

<u>OSS</u>: In $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ una retta è data dall'insieme delle soluzioni di una eq. omogenea in 3 incognite $\Rightarrow$ è un sottospazio di $\dim = 2$.

Teorema: 2 rette distinte in $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ si intersecano sempre. Se non si intersecano in un punto proprio $\Rightarrow$ sono parallele.

<u>DIM</u>: $2+2=4>3$ $\quad \dim \hat{\pi}_1 + \dim \hat{\pi}_2 = 4 > \dim \mathbb{K}^3 = 3$

$\Rightarrow \dim \hat{\pi}_1 \cap \hat{\pi}_2 = 1$

punti di $AG(2,\mathbb{K})$

$$(x,y) \longrightarrow [(x\ y\ 1)] \in \frac{\mathbb{K}^3 \setminus \{\underline{0}\}}{\sim}$$

$$(a,b,c) \sim (d,e,f) \iff rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 1$$

$(x,y) \longrightarrow$ classe di equivalenza di tutte le possibili basi di $\mathcal{L}((x\ y\ 1))$.

direzioni di $AG(2,\mathbb{K})$

$$(l,m) \longrightarrow [(l\ m\ 0)]$$

Ad ogni retta r di $AG(2,\mathbb{K})$ aggiungiamo il suo punto improprio $r_\infty = [(l\ m\ 0)]$

e chiamiamo ℓ_∞ la retta impropria formata da tutti i punti con coord. omogenee $[(\ell\ m, 0)]$ $\ell, m \in \mathbb{K}$.

Fasci di rette nel piano.

→ fascio proprio:

$$ax + by + c = 0$$

$$(a, b, c) \in \mathcal{L}((1\ 0\ \alpha), (0\ 1\ \beta))$$

→ fascio improprio

$$(a, b, c) \in \mathcal{L}((a'\ b'\ 0), \underbrace{(0\ 0\ 1)}_{})$$

$0 = 1$

$$0\cdot x + 0\cdot y + 1 = 0 \xrightarrow[\text{omogeneizzazione}]{} x_3\left(0\cdot\frac{x_1}{x_3} + 0\cdot\frac{x_2}{x_3} + 1\right) = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$\ell_\infty = \mathcal{L}((1\,0\,0),(0\,1\,0))$$

insieme di tutte le possibili direzioni del piano → retta impropria.

spazio $n=3$

$AG(3, \mathbb{K})$ $\longrightarrow$ $\mathbb{P}^3\mathbb{K} = \mathbb{P}\mathbb{K}^4$

$ax+by+cz+d=0$ $\longrightarrow$ $ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0$

piano (dim affine 2) $\longrightarrow$ sottospazio proiettivo di dim proiettiva $=2$ (ma che é sp. vett. di dimensione $=3$)

<u>2 piani distinti</u>

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \\ a'x_1+b'x_2+c'x_3+d'x_4=0 \end{cases}$$

1) sistema compatibile ∞^1 soluzioni → retta. $\longrightarrow$ sistema omogeneo 2 eq. $rk=2$ sottospazio di dim $=2$ → retta.

2) sistema incompatibile $\emptyset$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

→ sottospazio di dim 2

~~$\mathcal{L}((a'b'c'd'),(a$~~

$\mathcal{L}((\alpha\,\beta\,\gamma\,0),(l\,m\,n\,0))$

→ retta impropria perché $x_n = 0$

→ corrisponde alla giacitura comune dei 2 piani

Infatti $(\alpha\,\beta\,\gamma),(l\,m\,n)$ generano l'insieme delle sol. delle eq. omogenee associate ai piani.

3 piani → stella.

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \longmapsto \begin{array}{l} x_1 = x_0 x_4 \\ x_2 = y_0 x_4 \\ x_3 = z_0 x_4 \end{array}$$

$P = (x_0\ y_0\ z_0)$ $\qquad$ $\mathcal{L}((x_0\ y_0\ z_0\ 1))$

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ ax+by+cz+d''=0 \end{cases} \longrightarrow$$

sistema omogeneo in 4 incognite di rango 3 → si intersecano in un punto con $x_4 = 0$ ↓ punto improprio che corrisponde alla direzione comune.

con $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$ $\qquad d \neq d'$

questi 3 piani appartengono ad una stella propria

Teorema

1) 2 piani distinti in $\mathbb{P}^3\mathbb{K}$ si intersecano sempre in una retta

2) Una retta r ed un piano π in $\mathbb{P}^3\mathbb{K}$ si intersecano in un punto a meno che non sia $r \subseteq \pi$

3) Due rette sono sghembe in $\mathbb{P}^3\mathbb{K}$ $\Leftrightarrow$ sono disgiunte.

<u>Dim</u> 1) Formula di Grassmann: $\dim_V(\pi) = 3 \quad \pi \neq \sigma$

$\dim_V(\sigma) = 3$

$3+3 = 6 > 4 \qquad \dim_V(\pi \cap \sigma) = 2$ retta.

2) Idem: $\dim_V(r) = 2 \quad \dim_V(\pi) = 3$

$3+2 = 5 > 4 \Rightarrow \dim_V(\pi \cap r) = 1$ punto.

3) Se 2 rette sono sghembe non sono parallele e non si intersecano in un pto proprio.

OSS: Siano Σ, Θ due sottospazi di $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$. Allora il sottospazio di $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ più piccolo che contiene Σ e Θ è proprio $\Sigma + \Theta$ (visto come somma di spazi vettoriali).

$AG(n, \mathbb{K})$		$\mathbb{P}^n\mathbb{K}$
SOTTOSPAZI AFFINI = SOTTOSPAZI LINEARI	$\longleftrightarrow$	SOTTOSPAZI PROIETTIVI = SOTT. VETTORIALI

punto affine

sott vettoriale

$P = (3,5)$

$Q = (2,3)$

$r_G := \left[(3,5); \mathcal{L}((1{-}1,-2))\right]$

2 tipi di oggetti

$\overline{\pi} = \mathcal{L}((3\,5\,1),(2\,3\,1))$

$= \mathcal{L}((3\,5\,1),(-1\,-2\,0))$

punti proiettivi.

eq. della retta per 2 punti di $\mathbb{P}^2 \mathbb{K}$.

$P = [(a, b, c)]$

$Q = [(d \quad e \quad f)]$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

per trovare i punti affini poniamo $x_3 = 1$

$$f(X_1 \dots X_n) = 0 \longrightarrow x_{n+1}^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_{n+1}} \cdots \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = 0$$

$$F(x_1 \dots x_{n+1}) = 0$$

omogeneo

$$f(\underline{x_1} \dots x_n, 1) = 0 \longleftarrow$$

N.B.: Nel caso di $AG(n, \mathbb{K})$ un punto è univocamente determinato (fissato un riferimento) da una n-upla di elementi di $\mathbb{K}$.

Nel caso di $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ un punto corrisponde ad una classe di equivalenza di vettori non nulli che generano tutti il medesimo spazio vettoriale.

1) $(3,5) \longrightarrow [(3\ 5\ 1)] = [(1\ \frac{5}{3}\ \frac{1}{3})] =$

$\vdots$

$= [(6\ 10\ 2)]$

$(l,m) = (2,0) \longrightarrow [(2\ 0\ 0)] = [(1\ 0\ 0)]$

2) OSSERVIAMO CHE $[(0,0,0)]$ NON RAPPRESENTA <u>UN PUNTO</u>

NON È UN GENERATORE DI UN SOTTOSPAZIO DI DIM = 1 !!

3) In $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ tutte le equazioni devono essere omogenee cioè tutti i monomi che compaiono in ~~un~~ ogni singolo polinomio devono avere lo stesso grado

→ in particolare se $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n+1})$ è soluzione di un sistema $\Rightarrow \alpha(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n+1})$ deve essere soluzione $\forall \alpha \in \mathbb{K}$. → perché rappresentano il medesimo punto!

ma questo implica che in particolare

$$F(\alpha \bar{x}_1 \dots \alpha \bar{x}_{n+1}) = \alpha^{\deg F} F(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n+1})$$

$\Rightarrow$ F é omogeneo. $\forall F$ equazione.

In generale i punti di $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ corrispondenti ad una varietà algebrica sono tutti e soli quelli che corrispondono alle classi di proporzionalità di autosoluzioni di un sistema di equazioni omogenee.

$\mathbb{P}^3 \mathbb{K}$ $\quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0 \\ x_1 + x_2 - \frac{1}{2} x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Teorema (dell'ordine). Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e sia $\mathcal{C}$ una curva in $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ di grado n (cioè descritta da una eq. omogenea $F(x_1, x_2, x_3)=0$ con $\deg F = 3$).

algebrico

Allora per ogni retta $r \subseteq \mathbb{P}^2\mathbb{K}$ con $r \nsubseteq \mathcal{C}$ si ha $|r \cap \mathcal{C}| = n$.

geometrico.