$AG(n, \mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, f(P,Q) = Q-P)$.

Teorema: Esiste una corrispondenza biunivoca fra i sottospazi di $AG(n,\mathbb{K})$ e gli insiemi di soluzioni di sistemi lineari compatibili del tipo $AX=B$ con $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

Lemma: Sia $[P;W]$ un sottospazio lineare di $AG(n,\mathbb{K})$. Allora $\forall Q \in [P;W]$ si ha $[P;W]=[Q;W]$

(possiamo scegliere qualsiasi punto di $[P;W]$ come sua origine).

DIM: $Q \in [P;W] \iff \exists \bar{q} \in W : Q = P+\bar{q}$ $\quad P = Q+(-\bar{q})$

Sia $R \in [P;W] \Rightarrow \exists \bar{r} \in W : R = P+\bar{r} \Rightarrow R = Q+(-\bar{q})+\bar{r}$

$\Rightarrow R = Q + \underbrace{(\bar{r} - \bar{q})}_{\bar{w}} \Leftrightarrow R \in [Q;W] \Rightarrow [P;W] \subseteq [Q;W]$

Viceversa $R \in [Q;W] \Rightarrow R = Q + \bar{t}$ con $\bar{t} \in W \Rightarrow$

$\Rightarrow R = (P + \bar{q}) + \bar{t} = (P) + (\bar{q} + \bar{t}) \Rightarrow$

$\Rightarrow R \in [P;W] \Rightarrow [Q;W] \subseteq [P;W]$.

$\square$

Lemma 2: Siano $[P;W]$ e $[Q,U]$ due sottospazi lineari $\Rightarrow$ se $[P;W] \cap [Q,U] \neq \emptyset$ si ha $[P;W] \cap [Q;U] = [R; W \cap U]$ con $R \in [P;W] \cap [Q;U]$.

(il sottospazio di traslazione dell'intersezione di 2 sottospazi lineari è dato dall'intersezione dei sottospazi di traslazione di questi sottospazi a patto che la loro intersezione non sia vuota).

<u>DIM:</u> Supponiamo $[P;W]\cap[Q;\mathcal{U}]\neq\emptyset \Rightarrow \exists R\in[P;W]\cap[Q;\mathcal{U}]$

$\Rightarrow [P;W]=[R;W]$ e $[Q;\mathcal{U}]=[R;\mathcal{U}]$.

Sia $X\in[R;W]\cap[R;\mathcal{U}] \Rightarrow \exists\bar{w}\in W: X=R+\bar{w}$

$\exists\bar{u}\in\mathcal{U}: X=R+\bar{u}$

ma poiché $R+\bar{u}=R+\bar{w}$ si ha $\bar{u}=\bar{w} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{u}=\bar{w}\in\mathcal{U}\cap W \Rightarrow [R;W]\cap[R;\mathcal{U}]\subseteq[R;\mathcal{U}\cap W]$

Viceversa: sia $X\in[R;\mathcal{U}\cap W] \Rightarrow X=R+\bar{\pi}$ con

$\bar{\pi}\in\mathcal{U}\cap W \Rightarrow \bar{\pi}\in\mathcal{U} \Rightarrow X\in[R;\mathcal{U}]$

$\bar{\pi}\in W \Rightarrow X\in[R;W] \Rightarrow$

$\Rightarrow X\in[R;\mathcal{U}]\cap[R;W]$ $\square$

Def: Siano $\Sigma = [P; \mathcal{U}]$ e $\Theta = [Q; W]$ due sottospazi. Si dice che Σ è <u>parallelo</u> a Θ (in simboli $\Sigma // \Theta$) se $\mathcal{U} \subseteq W$ oppure $W \subseteq \mathcal{U}$.

N.B: Se dim W = dim $\mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $\Sigma // \Theta \Leftrightarrow W = \mathcal{U}$

Teorema: Siano $\Sigma = [P; \mathcal{U}]$, $\Theta = [Q; W]$ sottospazi con

$\Sigma // \Theta \Rightarrow$ ci sono 3 possibilità

1) $\Sigma \cap \Theta = \emptyset$
2) $\Sigma \subseteq \Theta$
3) $\Theta \subseteq \Sigma$.

DIM: Supponiamo $\exists R \in \Sigma \cap \Theta \Rightarrow \Sigma = [R; \mathcal{U}]$; $\Theta = [R; W]$

se $\mathcal{U} \leq W \Rightarrow \Sigma \cap \Theta = [R; \mathcal{U} \cap W] = [R; \mathcal{U}] = \Sigma$
$\Rightarrow \Sigma \leq \Theta$.

Se $W \leq \mathcal{U} \Rightarrow \Sigma \cap \Theta = [R; \mathcal{U} \cap W] = [R; W] = \Theta \Rightarrow$
$\Rightarrow \Theta \leq \Sigma$. $\square$

In particolare se $\dim \Theta = \dim \Sigma \Rightarrow \Theta \parallel \Sigma$ implica $\Theta = \Sigma$ oppure $\Theta \cap \Sigma = \emptyset$.

[rette: due rette parallele o coincidono o sono disgiunte]

Teorema di corrispondenza fra sp. affini e sistemi lineari.

- $\mathbb{A} = (A, V_n(\mathbb{K}), f)$ sp. affine
- $\Gamma = (O, \mathcal{B})$ riferimento affine.

$\Phi_P : A \to \mathbb{K}^n$ induce un isomorfismo con lo spazio affine delle n-uple $(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, f(P,Q) = Q - P)$.

$A^n G(n, \mathbb{K})$.

qualunque cosa diciamo in $AG(n, \mathbb{K})$ vale (applicando Φ_P^{-1}) anche in A

→ OSS 1: Sia $AX = B$ un sistema compatibile di m equazioni in n incognite $\Rightarrow$ ogni soluzione del sistema si scrive come $S \in \mathcal{S}$ ove $\mathcal{S} = \{ X_0 + Z \mid Z \in \mathrm{Ker}(A) \}$ X_0 soluzione particolare di $AX = B$. $\mathcal{S} = X_0 + \mathrm{Ker}(A)$

OSSERVO CHE $\mathcal{S} = [X_0 ; \mathrm{Ker}(A)]$

Infatti $S \in [X_0; Ker(A)] \iff S = X_0 + Z$ con $Z \in Ker(A)$
$\iff S \in \mathcal{S}$.

$\Rightarrow$ Viceversa: Sia $\Sigma = [X_0; W]$ un sottospazio lineare di $AG(n, \mathbb{K})$ $\Rightarrow$ $S \in \Sigma \iff \exists\, \bar{v} \in W$ tale che $S = X_0 + \bar{v}$.

Siano $(a_{11} \dots a_{1n}), \dots, (a_{k1} \dots a_{kn})$ una base di $W \leq \mathbb{K}^n$

$\Rightarrow$ dire che $S \in [X_0; W]$ è equivalente a dire che $\overrightarrow{X_0S} \in W$ cioè $S - X_0 \in \mathcal{L}((a_{11} \dots a_{1n}) \dots (a_{k1} \dots a_{kn}))$.

Sia $S = (x_1 \dots x_n)$

$X_0 = (x_1' \dots x_n') \leftarrow$ punto

$$(x_1 - x_1' \dots x_n - x_n') \in \mathcal{L}((a_{11} \dots a_{1n}) \dots (a_{k1} \dots a_{kn}))$$

$$\operatorname{rk}\begin{bmatrix} x_1 - x_1' & \dots & x_n - x_n' \\ a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} = \operatorname{rk}\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} = k$$

Tutti i minori $(k+1)\times(k+1)$ di questa matrice devono avere $\det = 0$

$\rightarrow$ si ottengono $\binom{n}{k+1}$ equazioni lineari.

perché ogni minore $(k+1)\times(k+1)$ vi dà una equazione di I grado in $x_1 \dots x_n$.

$\square$

<u>OSS 3:</u> Sia $\Sigma=[P;W]$ un sottospazio lineare e sia $AX=B$ un sistema lineare che lo descrive (in particolare $AX=B$ è compatibile) $\Rightarrow$ $W=\ker(A)$.

Detto in altre parole i vettori del sottospazio di traslazione di Σ sono tutte e sole le soluzioni del sistema omogeneo asssociato $AZ=\underline{0}$.

DEF: Sia $AG(n, \mathbb{K})$ uno spazio affine e siano $P_1 \dots P_t$ punti di esso.

Si dice che i punti $P_1 \dots P_t$ sono geometricamente indipendenti se i vettori $(\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_t})$ sono un sistema libero.

(e dunque generano uno spazio vettoriale di $\dim = t-1$).

Un punto da solo è per definizione indipendente.

Def: Dato un insieme di punti $P_1 \dots P_t$ si dice sottospazio affine generato da $P_1 \dots P_t$ il più piccolo sottospazio affine che li contiene tutti

$\mathcal{S}(P_1 \dots P_t)$ $\neq$ $\mathcal{L}(P_1 \dots P_t)$

sottospazio affine che contiene $P_1 \dots P_t$

sottospazio vettoriale che contiene $P_1 \dots P_t$.

$$\mathcal{L}((0\,1),(1\,1)) = \{\alpha(0\,1)+\beta(1\,1) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{K}\}.$$

$$\mathcal{S}((0,1),(1,1)) = [(0\,1);\mathcal{L}(1\,0)] = \{(0\,1)+\alpha(1\,0) \mid \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Teorema: $\mathcal{S}(P_1 \dots P_t) = [P_1; \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_t})]$

<u>DIM</u>: poi sia $\Sigma = \mathcal{S}(P_1 \dots P_t) = [P_1; W]$ in quanto possiamo sempre scegliere come origine di Σ un suo qualsiasi punto

e dunque prendiamo P_1.

Inoltre se $P_2 \dots P_t \in \Sigma \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_t} \in W$

$\Rightarrow [P_1; \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_t})] \subseteq \Sigma$.

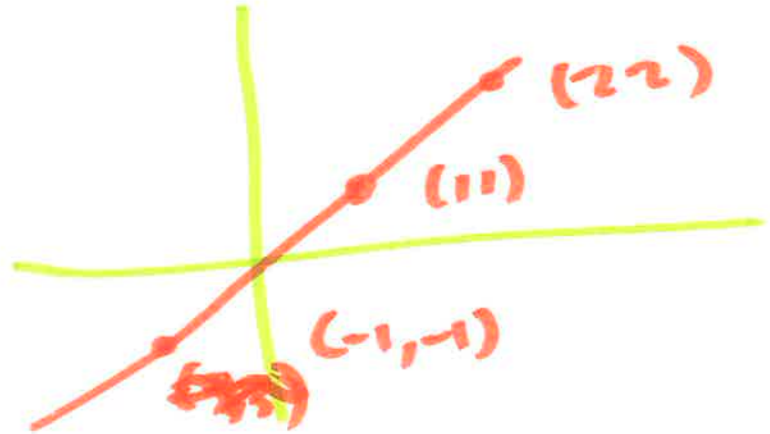
Dal fatto che $[P_1; \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_t})]$ contiene tutti i punti dati ed è un sottospazio lineare abbiamo $\Sigma \subseteq [P_1; \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_t})]$

NE SEGUE $\Sigma = [P_1; \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_t})]$

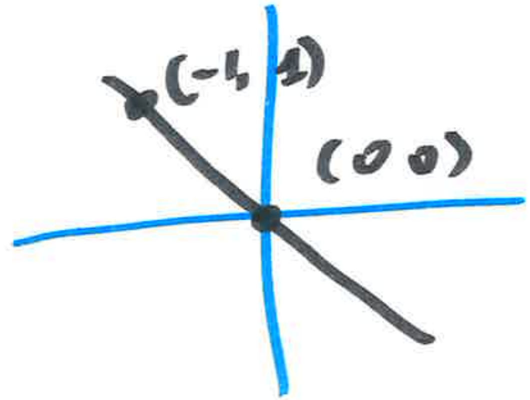
ed in particolare $W = \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_t})$. $\square$

CONSEGUENZA: $(t+1)$ punti sono indipendenti geom. $\Leftrightarrow$ essi generano un sottospazio affine di dimensione t

In particolare $(t+1)$ punti sono indipendenti $\Leftrightarrow$ nessuno di essi appartiene al sottospazio generato dai ~~[illegible]~~ rimanenti t di essi diversi da lui stesso.



DIPENDENTI



INDIPENDENTI

Retta = sottospazio affine di dim = 1
lineare

$r = [P; W_1]$ con dim $W_1 = 1$

in $AG(n, \mathbb{K})$: $P = (p_1 \dots p_n)$

$W = \mathcal{L}((e_1 \dots e_n))$.

Equazioni parametriche $\begin{cases} x_1 = p_1 + \alpha e_1 \\ x_2 = p_2 + \alpha e_2 \\ \vdots \\ x_n = p_n + \alpha e_n \end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{K}$

Es. nel piano $[(x_0, y_0); \mathcal{L}((\ell, m))]$

$$\begin{cases} x = x_0 + t\ell \\ y = y_0 + tm \end{cases} \qquad (\ell, m) \neq (0\,0) \quad t \in \mathbb{K}.$$

nello spazio $\begin{cases} x = x_0 + t\ell \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \qquad (\ell, m, n) \neq (0\,0\,0) \quad t \in \mathbb{K}.$

$[P; W_1]$ $\qquad \overrightarrow{PX} \in W_1$

$$(x_1\, x_2 \dots x_n) - (p_1 \dots p_n) \in \mathcal{L}((\ell_1 \dots \ell_n))$$

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 & \dots & x_n - p_n \\ \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_n \end{pmatrix} = 1$$

$P=(x_0,y_0) \qquad W=\mathcal{L}((l,m))$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ l & m \end{pmatrix}=1$$

$$\det\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ l & m \end{pmatrix}=0$$

$$m(x-x_0)-l(y-y_0)=0 \quad (*).$$

$$\boxed{\frac{(x-x_0)}{l}=\frac{(y-y_0)}{m}}$$

con la convenzione che se $l=0$ oppure $m=0$ la si legge come (*)

$P = (x_0 \; y_0 \; z_0) \qquad W = \mathcal{L}((\ell \; m \; n))$

$$rk \begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \ell & m & n \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ \ell & m \end{vmatrix} = 0 \qquad \frac{x-x_0}{\ell} = \frac{y-y_0}{m}$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & z-z_0 \\ \ell & n \end{vmatrix} = 0 \qquad \frac{x-x_0}{\ell} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ m & n \end{vmatrix} = 0 \qquad \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{\ell} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}}$$

Siano P, Q due punti distinti $\Rightarrow \vec{PQ} \neq \underline{0}$

ed in particolare $[P; \mathcal{L}(\vec{PQ})]$ è un

sottospazio affine di dimensione $1 \Rightarrow$ è una

retta. $\Rightarrow \forall P, Q : P \neq Q \; \exists\, r$ retta con $P, Q \in r$

infatti $P \in r = [P; \mathcal{L}(\vec{PQ})]$ e $Q \in r$ con $Q = P + \vec{PQ}$.

Supponiamo s retta $\quad s = [R; W_1]$ con

$P, Q \in s \quad \Rightarrow \quad s = [P; W_1]$ e $\vec{PQ} \in W_1$

$P \neq Q$

in quanto $Q \in s \Rightarrow$ ~~ma~~ $\dim W_1 = 1 \quad \vec{PQ} \in W_1$

e $\vec{PQ} \neq \underline{0} \Rightarrow W_1 = \mathcal{L}(\vec{PQ}) \Rightarrow s = [P; \mathcal{L}(\vec{PQ})]$

$\rightarrow$ per 2 punti distinti passa una ed una sola retta.

Teorema: Siano r, s due rette in $AG(2, \mathbb{K})$.
Allora se $r \cap s = \emptyset \Rightarrow r // s$.

DIM: Siano $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ le equazioni di r ed s.

$(a,b) \neq (0\,0)$
$(a'\,b') \neq (0\,0)$.

dire $r \cap s = \emptyset$ vuol dire che il sistema con matrice completa $\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right)$ deve essere incompatibile $\Rightarrow rk(A) \neq rk(A|B)$.

Se $rk(A)=2 \Rightarrow rk(A|B)=2$ NON VA BENE.

Serve $rk(A)=1$ e $rk(A|B)=2$

$rk(A) = 1$ significa che i vettori (a,b) e (a',b') sono proporzionali $\Rightarrow$ i sistemi $ax+by=0$ e $a'x+b'y=0$ hanno le stesse soluzioni

ma le soluzioni di $ax+by=0$ danno la direzione di r che è $\mathcal{L}((-b,a))$.

e le soluzioni di $a'x+b'y=0$ danno la direzione di s che è $\mathcal{L}((-b,a))$

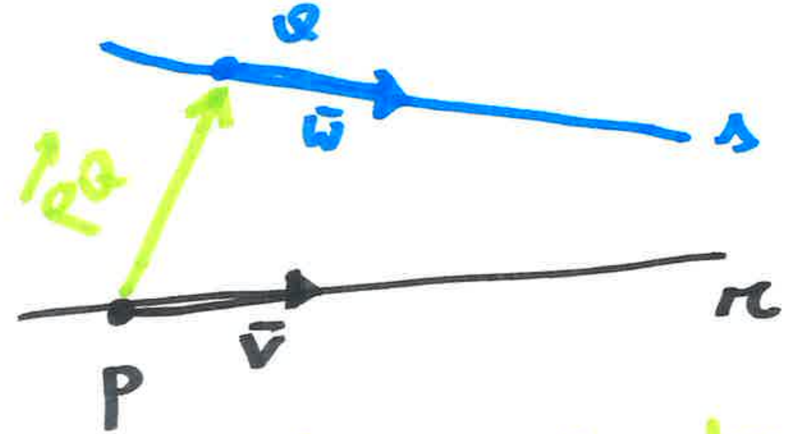
$\Rightarrow r \parallel s$. $\square$

$r = [P; \mathcal{L}(\bar{v})]$

$s = [Q; \mathcal{L}(\bar{w})]$

DIMOSTRIAMO IN $AG(2, \mathbb{K})$ che

se $\mathcal{L}(\bar{v}) \neq \mathcal{L}(\bar{w}) \Rightarrow r \cap s \neq \emptyset$



supponiamo $\bar{v}, \bar{w}$ indipendenti:

nel piano $\vec{PQ} = \alpha \bar{v} + \beta \bar{w}$

vogliamo cercare R tale che $R = P + a\bar{v} \in r$

$$R = Q + b\bar{w} \in s$$

$$s \ni Q + b\bar{w} = (P + \overrightarrow{PQ}) + b\bar{w} =$$

$$= P + (\alpha\bar{v} + (b+\beta)\bar{w}) =$$

$$= P + a\bar{v} \in r$$

Scegliamo $a = \alpha$ $b = -\beta$

Teorema: in $AG(3, \mathbb{K})$ due piani disgiunti sono paralleli.

Teorema: due piani in $AG(3, \mathbb{K})$ o sono disgiunti e quindi paralleli
o si intersecano in una retta o coincidono.

<u>DIM</u>: Siano $\pi: ax+by+cz+d=0$

$\sigma: a'x+b'y+c'z+d'=0$

per studiare l'intersezione mettiamo le eq. a sistema

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc:c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right]$$

$rk(A)=1 \iff \pi // \sigma$

$rk(A)$	$rk(A\|B)$		
1	1	∞^2 sol	$\pi = \sigma$
1	2	0 sol.	$\pi // \sigma ; \pi \neq \sigma$
2	2	∞^1 sol.	retta.

Teorema: In $AG(3,\mathbb{K})$ siano π un piano ed r una retta.

Allora o $r \parallel \pi$ e $r \cap \pi = \emptyset$, o $r \cap \pi = \{P\}$

o $r \subseteq \pi$.

<u>DIM</u>: π: $ax+by+cz+d=0$ $\quad (a,b,c) \neq (0\,0\,0)$

$$r: \begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases} \qquad rk\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2$$

$$= rk\begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right]$$

	$rk(A)$	$rk(A\|B)$		
(1)	2	2	∞^1 sol!	$r \subseteq \pi$
	2	3	0 sol	$r \cap \pi = \emptyset$; $r \parallel \pi$.
(2)	3	3	$\exists!$ sol.	$r \cap \pi = \{P\}$.

(1) infatti ogni soluzione del sistema che dà la retta deve essere soluzione dell'eq. del piano in quanto quest'ultima è c.lineare delle eq. della retta $\Rightarrow r \subseteq \pi$

(2) NEL CASO (2) ~~...~~ l'eq. omogenea associata al piano è c.lineare delle 2 eq. omogenee associate alla retta $\Rightarrow$ in particolare

ogni soluzione del sistema omogeneo associato alla retta è sol. dell'eq. omogenea associata al piano $\Rightarrow$ OGNI VETTORE DELLA DIREZIONE DELLA RETTA è un vettore DELLA GIACITURA DEL PIANO $\Rightarrow r \parallel \pi$

$$r = [P; W_1] \qquad \pi = [Q; U_2] \text{ e } W_1 \subseteq U_2 .$$

$\blacksquare$