<u>OSS</u> su autospazi di una matrice reale e simmetrica.

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$$

ove

$$\mathrm{Spec}(A) = \{\lambda_1 \dots \lambda_k\}.$$

Se $A = {}^tA$ reale e simmetrica.

$$V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2} \perp \dots \perp V_{\lambda_k}$$

gli autospazi di A sono mutualmente ortogonali.

$$\forall \bar{v} \in V_{\lambda_i} \quad \forall \bar{w} \in V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_{i-1}} \oplus V_{\lambda_{i+1}} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$$

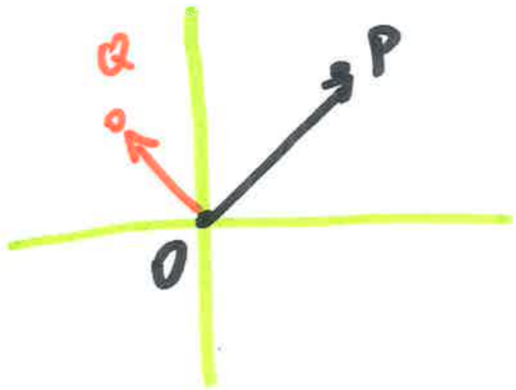
si ha $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$

Viene immediatamente dal fatto che la matrice diag. ortogonale perché ogni colonna è ortogonale a tutte le altre e quindi in particolare i vettori della base di un autospazio sono tutti ortogonali ai vettori dell'unione delle basi dei rimanenti $\Rightarrow$ ogni vettore di V_{λ_i} è ortogonale ad ogni vettore della somma dei rimanenti autospazi.

$$\left[\underbrace{P_1 \;\; P_2 \cdots P_{j_1}}_{\text{Base di } V_{\lambda_1}} \;\; \underbrace{P_{j_1+1} \cdots\cdots P_n}_{\text{Base di } V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}} \right]$$

Geometria Analitica

→ esercizio di applicazione dell'algebra lineare.



O punto = origine

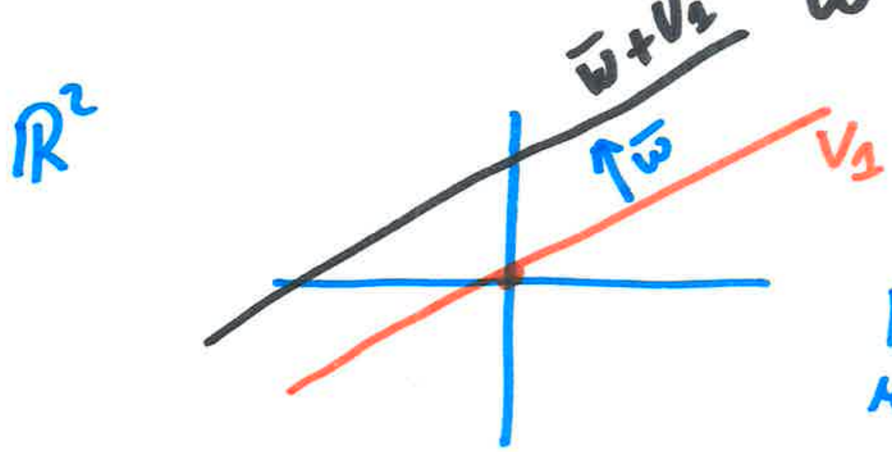
P e diciamo che

P sarà identificato dal vettore $\overrightarrow{OP}$

Una geometria affine è un ambiente in cui ci sono "punti" e in cui possiamo trasformare i punti dati in altri punti mediante "traslazioni" che sono funzioni definite dagli elementi di uno opportuno spazio vettoriale.

→ Spazio affine = Geometria dove gli elementi sono dati da sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale dato e loro traslati ove per traslato di un sottospazio $\mathcal{U} \leq V_n(\mathbb{K})$ intendiamo l'insieme

$$\bar{w} + \mathcal{U} := \{ \bar{w} + \bar{u} \mid \bar{u} \in \mathcal{U} \}.$$



$V_1 \leq \mathbb{R}^2$

punti = traslati di $\{\underline{0}\}$.

rette = traslati di $V_1 \leq V_n(\mathbb{K})$, $\dim V_1 = 1$

piani = traslati di $V_2 \leq V_n(\mathbb{K})$, $\dim V_2 = 2$.

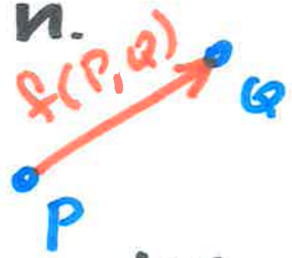
Def: Si dice **geometria affine** di dim. n su di un campo $\mathbb{K}$ una struttura

$$AG(n,\mathbb{K}) = AG_n(\mathbb{K}) =$$

una terna $(A, V_n(\mathbb{K}), f)$.

Ove 1) A è un insieme $A \neq \emptyset$ detto insieme dei punti

2) $V_n(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale nel campo $\mathbb{K}$ di dim $= n$.

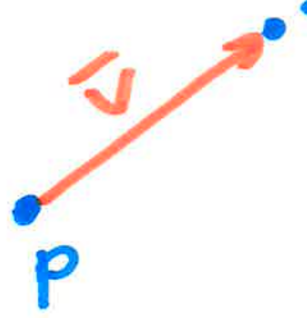


3) $f : A \times A \to V_n(\mathbb{K})$ che gode delle seguenti proprietà

a) $\forall P \in A \ \forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{K}) \ \exists! Q \in A : f(P,Q) = \bar{v}$

b) $\forall P, Q, R \in A \quad f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$.

a)



$\exists!\, Q : f(P,Q) = \bar{v}$

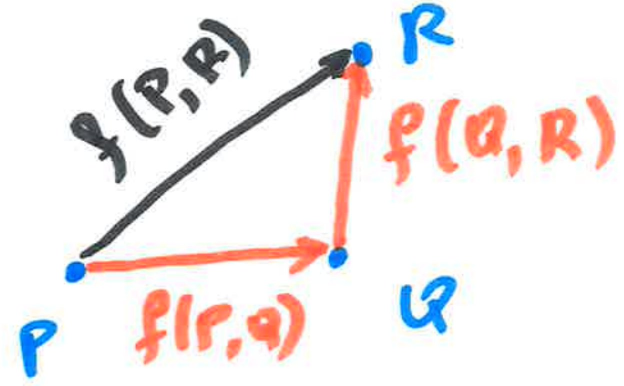
In generale scriverò

$Q = P + \bar{v}$

punto — vettore

DIREMO Q è il traslato di P MEDIANTE $\bar{v}$

b)



per semplicità scriverò anche

$\overrightarrow{PQ} := f(P,Q)$.

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

MOSTRIAMO CHE CI SONO TANTI PUNTI QUANTI ELEMENTI DI $V_n(\mathbb{K})$.

$$|A| = |V_n(\mathbb{K})|$$

Lemma: $\overrightarrow{PQ} = \underline{0} \iff P = Q$.

DIM: Se $P = Q \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP}$ e $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$

sottraendo a dx e sx $\overrightarrow{PP}$ si ha

$\underline{0} = \overrightarrow{PP}$

Supponiamo $\overrightarrow{PQ} = \underline{0} \Rightarrow Q = P + \overrightarrow{PQ} =$

$= Q = P + \underline{0}$

ma anche $P = P + \underline{0}$ per

quanto visto prima $\Rightarrow P = Q$ $\square$

COROLLARIO: $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

DIM: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \underline{0}$

OSSERVIAMO CHE SE FISSIAMO

$O \in A \Rightarrow$ funzione $f_0(x) := f(O,x) = \overrightarrow{Ox}$

è per l'assioma (a) iniettiva.

Infatti se $\exists\, x, y : f_0(x) = f_0(y) \Rightarrow \overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{Oy}$

$\Rightarrow x = y$.

$$|A| \le |V_n(\mathbb{K})|$$

Viceversa: $\forall\, \bar{v} \in V_n(\mathbb{K})\ \exists\, Q = O + \bar{v}$.

In particolare $\forall\, \bar{v} \in V_n(\mathbb{K})\ \exists\, Q$:

$$f(O,Q) = \bar{v} = f_0(Q)$$

$\Rightarrow f_0$ è suriettiva $\Rightarrow$

$$|A| \ge |V_n(\mathbb{K})| \qquad \square$$

In particolare f_0 è biiettiva.

Enti geometrici → sottospazi affini di uno spazio affine. (A, V_n, f)

Sottospazi affini

$A' \subseteq A$ tale che

$\exists W \leq V_n(\mathbb{K})$ con

$f' := f^{|W}_{|A' \times A'}$ ristretta a $A' \times A'$ troncata a W

tali che (A', W, f') sia uno spazio affine.

sottospazi lineari.

Sia $W \leq V_n$ e $P \in A$

$[P; W] = \{ P + \bar{w} \mid \bar{w} \in W \}$.

origine

- giacitura se $\dim W = 2$
- sottospazio di traslazione.
- direzione se $\dim W = 1$

Tutti i traslati di un punto P mediante un sottospazio W.

Teorema: I sottospazi affini di (A, V_n, f) sono tutti e soli i suoi sottospazi lineari.

<u>DIM</u> 1) Ogni sottospazio lineare $\underset{\overset{\shortparallel}{S}}{[P;W]}$ è un sottospazio affine. $(S, W, f^{|W}_{|S\times S})$.

DOBBIAMO VERIFICARE SOLAMENTE CHE:

1) $\forall R, Q \in S$: $\overrightarrow{RQ} \in W$

2) $\forall \bar{w} \in W \ \forall R \in S$: $R + \bar{w} \in S$.

1) $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ}$

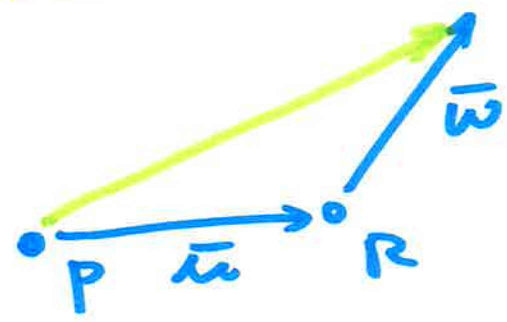
ma $\overrightarrow{PR} \in W$ infatti $R \in S \iff \exists \bar{w} \in W : \overrightarrow{PR} = \bar{w}$

$\overrightarrow{PQ} \in W$ " $Q \in S \iff \exists \bar{u} \in W : \overrightarrow{PQ} = \bar{u}$

$\Rightarrow -\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ} = -\bar{w} + \bar{u} \in W.$

2) Sia $R \in S \Rightarrow \exists\, \bar{u} \in W : R = P + \bar{u} \Rightarrow$

$\Rightarrow R + \bar{w} = (P + \bar{u}) + \bar{w} = P + (\bar{u} + \bar{w})$



e $\bar{u} + \bar{w} \in W \Rightarrow R + \bar{w} \in S.$

1. Ogni sottospazio lineare è un sottospazio affine

2) Ogni sottospazio affine (A', W, f') è un sottospazio lineare.

$\Sigma := [P; W]$ con $P \in A'$ punto fissato.

Mostriamo che $A' = \Sigma$.

a) Innanzi tutto sia $Q \in \Sigma \Rightarrow Q = P + \bar{w}$ con $\bar{w} \in W \Rightarrow f(P, Q) \in W \Rightarrow P + \bar{w} \in A'$ per la prop.

$\Rightarrow \Sigma \subseteq A'$.

b) Supponiamo $Q \in A' \Rightarrow f(P, Q) \in W \Rightarrow$
$Q = P + \overrightarrow{PQ}$ con $\overrightarrow{PQ} \in W$
$\Rightarrow Q \in \Sigma$. $\square$

<u>Def</u>: Sia $\Sigma = [P; W]$ un sottospazio (lineare) di $AG(n, \mathbb{K})$. Si dice dimensione (geometrica) di Σ il numero

$$\dim \Sigma = \dim W$$

cioè la dimensione del suo sottospazio di traslazione.

$\dim W$	Σ	W
0	$\{P\}$ punto	$W_0 = \{\bar{0}\}$.
1	$P + W_1$ retta	$W_1 = \mathcal{L}(\bar{v})$ direzione
2	$P + W_2$ piano	$W_2 = \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{v})$ giacitura.
3	$P + W_3$ solido	$W_3 = \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$.
$n-1$	$P + W_{n-1}$ iperpiano	$\dim W_{n-1} = n-1$

$P \in A$ $\qquad \{P\} \subseteq A$??

identifichiamo i punti con i singoletti $\{P\}$.

Riferimento affine (R.A.) $\Gamma = (O, \mathcal{B})$

Sia $(A, V_n(\mathbb{K}), f)$ uno spazio affine di dimensione n. Si dice riferimento affine una coppia $\Gamma = (O, \mathcal{B})$ ove $O \in A$ è un punto, detto origine $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ è una base (ordinata) di $V_n(\mathbb{K})$.

Definiamo una funzione di coordinatizzazione

$$\Phi_\Gamma : \begin{cases} A \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ P \longrightarrow (p_1 \dots p_n) \quad \text{ove} \quad \overrightarrow{OP} = \sum p_i \bar{e}_i \end{cases}$$

$\Phi_r(P)$ é il vettore delle componenti di $\vec{OP}$ rispetto la base $\mathcal{B}$.

Teorema: $\Phi_r(P)$ é una biezione fra A e $\mathbb{K}^n$ (quindi potremo identificare A con $\mathbb{K}^n$)

<u>DIM:</u> $\forall P$ il vettore $\vec{OP}$ é univocamente determinato e dunque anche le sue componenti rispetto a $\mathcal{B}$ e se 2 punti P, Q hanno le stesse coordinate $\Phi_r(P) = \Phi_r(Q) \Rightarrow \vec{OP} = \vec{OQ}$ $\Rightarrow P = Q$. $\Rightarrow$ INIETTIVA.

Sia $(p_1 \dots p_n) \in \mathbb{K}^n \Rightarrow \bar{v} = \sum p_i \bar{e}_i \in V_n(\mathbb{K})$
$\Rightarrow O + \bar{v} \equiv P \in A$ e $f_O(P) = f(O + \bar{v}) = \bar{v}$
e dunque $\Phi_r(P) = (p_1 \dots p_n)$
$\Rightarrow$ SURIETTIVA $\square$

Teorema: Sia ~~$A_n(\mathbb{K})$~~ $(A, V_n(\mathbb{K}), f)$ uno spazio affine $\Gamma = (O, \mathcal{B})$ un suo riferimento affine.

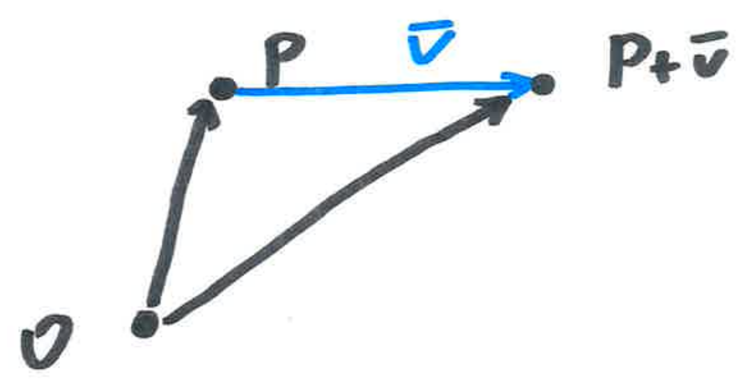
Sia $P \in A$ un punto e $\Phi_\Gamma(P) = \bar{p} = (p_1 \dots p_n)$ le sue coordinate rispetto a Γ.

Sia $\bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$ un vettore e siano $(v_1 \dots v_n)$ le sue componenti rispetto a $\mathcal{B}$.

Allora $\Phi_\Gamma(P + \bar{v}) = (p_1 \dots p_n) + (v_1 \dots v_n) = (p_1 + v_1 \dots p_n + v_n)$

N.B: Punti + vettori $\rightarrow$ Punti (= traslati)
vettori + vettori $\rightarrow$ vettori
Punti + Punti $\Rightarrow$ NON HA SENSO (in questo contesto).

DIM:



le coordinate di P sono le componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$. Il punto $P+\bar{v}$ è il punto Q tale che $\overrightarrow{OP}+\bar{v}=\overrightarrow{OQ}$

infatti deve essere $\overrightarrow{PQ}=\bar{v}$ ma

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ} \Rightarrow \overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PO}$$
$$=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OP}=\bar{v}+\overrightarrow{OP}$$

ma le componenti di OQ sono proprio

$$(p_1 \dots p_n)+(v_1 \dots v_n)$$ $\square$

$\Rightarrow$ In particolare $\qquad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} =$

$$= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

si può anche con un abuso di notazione scrivere $\overrightarrow{PQ} =: Q - P$

Inoltre possiamo vedere che il nostro spazio affine $(A, V_n(\mathbb{K}), f)$ è isomorfo a

$$\left(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, f: \begin{cases} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ \bar{p}, \bar{q} \to \bar{q} - \bar{p} \end{cases}\right)$$

mediante

Φ_r

$AG(n, \mathbb{K})$