DIAGONALIZZABILITÀ

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$

1) Autovalori
2) M. algebriche e M. geometriche.
3) Verificare $\sum m_g = n$
4) Trovare gli autospazi, relative basi

→ MATRICE DIAGONALIZZANTE

MATRICE DIAGONALE SIMILE.

Supponiamo $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ con n autovalori distinti

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile.

$$m_a(\lambda) = 1 = m_g(\lambda) \quad \forall \lambda \in Spec(A)$$

Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrice reale.

Teorema spettrale: Se $A = {}^T\!A$ allora tutti gli autovalori di A sono reali.

$$\boxed{Spec_{\mathbb{C}}(A) = Spec_{\mathbb{R}}(A)}$$

$$\rightarrow \sum_{\lambda \in Spec_{\mathbb{R}}(A)} m_a(\lambda) = n$$

Teorema della base spettrale: Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è ortogonalmente diagonalizzabile se e solamente se $A = {}^T\!A$.

1) A è diagonalizzabile se $A = {}^T\!A$
2) Se $A = {}^T\!A \Rightarrow \exists P$ tale che ${}^T\!P = P^{-1}$ e $P^{-1}AP = D$

D diagonale.

Teorema spettrale (DIM).

1) OSSERVIAMO CHE $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso. in particolare ogni polinomio a coeff. in $\mathbb{C}$ (e quindi anche $\forall$ polinomio a coeff. in $\mathbb{R}$) di grado n ha sempre n radici in $\mathbb{C}$.

2) Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ le cui radici sono gli autovalori di A è un polinomio reale ~~a coeff~~ di grado n in λ $\Rightarrow$ esso ha n radici in $\mathbb{C}$.

3) prendiamo ora un elemento

$$\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A)$$

cioè una radice complessa di ~~$p(\lambda)$~~ $p(x) = \det(A - \lambda I)$

ovvero un autovalore complesso di A.

→ Facciamo vedere che $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\exists$ sicuramente in $\mathbb{C}$ per (1)

FACENDO VEDERE CHE $\lambda = \bar{\lambda}$

4) Sia dunque λ autovalore complesso di A ed $X \in \mathbb{C}^n$ un autovettore di A di autovalore λ.

$$\boxed{\lambda\,{}^{T}X\overline{X}} = {}^{T}(\lambda X)\overline{X} = {}^{T}(AX)\overline{X} = {}^{T}X\,{}^{T}A\,\overline{X} \underset{\substack{\text{perché}\\ A={}^{T}A}}{=} {}^{T}X A\overline{X} \underset{\substack{\text{perché}\\ A=\overline{A}}}{=} {}^{T}X\overline{A}\overline{X} =$$

$$= {}^{T}X\,\overline{(AX)} = {}^{T}X\,(\overline{\lambda X}) = \boxed{\overline{\lambda}\,{}^{T}X\overline{X}}.$$

oss: X è un autovettore $\Rightarrow X \neq \underline{0}$

$${}^{T}X\overline{X} = (x_1 \dots x_n)\begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{bmatrix} = x_1\overline{x_1} + \dots + x_n\overline{x_n} =$$

$$= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 = 0 \iff$$

$$\iff x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

se X autovettore $\Rightarrow {}^{T}X\overline{X} \in \mathbb{R}$ con ${}^{T}X\overline{X} > 0$.

$\Rightarrow$ possiamo dividere per ${}^{T}X\bar{X}$ $\Rightarrow$ $\lambda = \bar{\lambda}$ cioé $\lambda \in \mathbb{R}$ $\square$

$$A \in \mathbb{R}^{n,n} \;\&\; {}^{T}A = A \Rightarrow \sum_{\lambda \in Spec(A)} m_a(\lambda) = n$$

Teorema della base spettrale (DIM). $[A = {}^{T}A, A \in \mathbb{R}^{n,n}]$ $\Downarrow$ [A ORT. DIAG.]

PER INDUZIONE SU n = ordine di A

- $n = 1 \rightarrow$ BANALE $A = (a_{11})$ $A = {}^{T}A$ e si "diagonalizza" moltiplicando per I che è ortogonale "(1).

- $(n-1) \Rightarrow n$ cioé se $\forall$ matrice A' reale e simmetrica di ordine $(n-1)$ è ortogonalmente diag. $\Rightarrow$ anche ogni matrice reale e simmetrica di ordine n è ortogonalmente diag.

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ammette almeno un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$

sia dunque $\lambda \in Spec(A)$ ed $X \in \mathbb{R}^n$ un suo autovettore. Possiamo supporre senza perdere in generalità (WLOG) che $\|X_1\|^2 = 1$ rispetto il prod. scalare standard.

$$\sum^n x_i^2 = 1 \quad X_1^T = (x_1 \dots x_n)$$

completiamo il vettore X_1 a base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ e poniamo $P = (X_1 \, y_2 \dots y_n)$

$P \in \mathbb{R}^{n,n}$ ed ha come colonne un sistema ortonormale di vettori rispetto il prod scalare std. di $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \quad {}^T P P = \begin{bmatrix} {}^T x_1 \\ {}^T y_2 \\ \vdots \\ {}^T y_n \end{bmatrix} [x_1 \, y_2 \dots y_n] = \begin{bmatrix} {}^T x_1 x_1 & {}^T x_1 y_2 & \dots & {}^T x_1 y_n \\ {}^T y_2 x_1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ {}^T y_n x_1 & & \dots & {}^T y_n y_n \end{bmatrix}$$

D'altro canto ${}^T y_i \, y_j$ é proprio il prod. scalare fra y_i e y_j $\Rightarrow$ ${}^T P P = I$ in quanto ${}^T x_1 x_1 = 1 = {}^T y_i \, y_i$ $\forall i$ e le altre entrate sono $= 0$.

$$P^{-1} A P = {}^T P A P = \begin{bmatrix} {}^T x_1 \\ {}^T y_2 \\ \vdots \\ {}^T y_n \end{bmatrix} A [x_1 \, y_2 \dots y_n] =$$

$$
= \begin{bmatrix} {}^{T}X_1 A X_1 & {}^{T}X_1 A y_2 & \cdots & {}^{T}X_1 A y_n \\ {}^{T}y_2 A X_1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ {}^{T}y_n A X_1 & \cdots & & {}^{T}y_n A y_n \end{bmatrix} =
$$

$$
({}^{T}X_1 A) = ({}^{T}X_1 {}^{T}A) = {}^{T}(AX_1) = \lambda {}^{T}X_1
$$

$$
AX_1 = \lambda X_1
$$

$$
= \begin{bmatrix} \lambda {}^{T}X_1 X_1 & \lambda({}^{T}X_1 y_2) & \cdots & \lambda({}^{T}X_1 y_n) \\ \lambda y_2^{T} X_1 & & & \\ \vdots & & \boxed{A' = {}^{T}A'} & \\ \lambda y_n^{T} X_1 & & & \end{bmatrix} =
$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{A' = {}^{T}\!A'} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = P^{-1}AP = {}^{T}\!PAP$$

OSS: che $A' = {}^{T}\!A'$ segue dal fatto che l'entrata generica in posizione (i,j) di A' è ${}^{T}y_{i+1} \cdot y_{j+1} = {}^{T}y_{j+1} \cdot y_{i+1} \Rightarrow$ A' è simmetrica.

per ipotesi induttiva $\exists\ P' \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ con ${}^{T}\!P' = P'^{-1}$ tale che $D' = {}^{T}\!P'A'P =$
$= P'^{-1}A'P$

poniamo $Q = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P' \end{array}\right]$ ed osserviamo che

$${}^{T}Q\,Q = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & {}^{T}P' \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & P' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & {}^{T}P'P' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & I \end{array}\right] =$$

$I \Rightarrow Q$ è ortogonale.

$${}^{T}Q\,({}^{T}PAP)\,Q = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & {}^{T}P' \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \lambda & \\ \hline & A' \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & P' \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & {}^{T}P'AP' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & \\ \hline & D \end{array}\right]$$

quindi é una matrice diagonale.

D'altro canto

$$ {}^T(PQ)\cdot(PQ) = {}^TQ\,{}^TP\,P\,Q = $$
$$ = {}^TQ\,({}^TP\,P)\,Q = {}^TQ\,I\,Q = $$
$$ = {}^TQ\,Q = I $$

Quindi (PQ) è una matrice ortogonale

e $$ (PQ)^{-1} A (PQ) = {}^T(PQ)\,A\,(PQ) = $$
$$ = \text{matrice diagonale } \left[\begin{array}{c|c} \lambda & \\ \hline & D' \end{array}\right]_D $$

A reale e simmetrica $\Rightarrow$ A ortogonalmente diagonalizzabile.

A ortogonalmente diagonalizzabile $\Rightarrow$ A è reale e simmetrica.

$\exists P: P^{-1} = {}^TP$ e $P^{-1}AP = D$

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = D$$

TRASPONENDO TUTTO VEDIAMO CHE ${}^t({}^tPAP) = {}^tP\,{}^tA\,P =$

$= {}^tD = D$

per cui ${}^tPAP = {}^tP\,{}^tA\,P$ con P invertibile.
moltiplicando a sx per P e a dx per ${}^tP = P^{-1}$
otteniamo $A = {}^tA \Rightarrow A$ simmetrica. $\square$

CONSEGUENZA: Supponiamo A matrice di un prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$
A matrice reale e simmetrica
$\Rightarrow$ ALLORA $\exists$ una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ ortogonale tale che chiamata P la app.

matrice di cambiamento di base

$$P^{-1}AP = D$$

ma $\quad P^{-1}AP = {}^{T}PAP \quad$ perché P ortogonale.

$\Rightarrow$ esiste una base rispetto cui il prodotto scalare definito da A ha forma diagonale.

$$(x_1 \dots x_n) \cdot_A (y_1 \dots y_n) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i y_i$$

osserviamo che nulla vieta di sostituire i vettori della base assegnata con gli stessi divisi per $\sqrt{|{}^{T}xAx|}$ se ${}^{T}xAx \neq 0$; altrimenti li lasciamo stare.

Rispetto la nuova base $\mathcal{B}'$ il prod. scalare è descritto da una matrice diagonale le cui uniche possibili entrate sulla diag. principale sono $+1, 0, -1$

I prodotti scalari su $\mathbb{R}^n$ si classificano dunque tutti in termini della loro <u>segnatura</u> =

numero di autovalori > 0,
numero di autovalori $= 0$
numero di autovalori < 0.

$(+ + +)$ definito positivo
$\to$ Euclideo
$(- - -)$ definito negativo
$(+ + -)$

In relatività sullo spazio/tempo si usa un prod. scalare con segnatura
$(+ + + -)$ o $(- - - +)$

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & k \\ 3 & 4 & 1 \\ k & -k & 2 \end{bmatrix}$ quando ort. diagonalizzabile? $\Leftrightarrow A = {}^{T}A$

$\Leftrightarrow k = -1$

N.B. A in generale ha come autovalori

$(7,\ 2-k,\ k+1)$

per cui per $k \neq -5, 6, \frac{1}{2}$ essa è sicuramente diagonalizzabile ma se $k \neq -1$ NON lo È ORTOGONALMENTE.

→ INCIDENTALMENTE

$k = -5 \Rightarrow m_a(7) = 2 \neq 1 = m_g(7)$

$k = 6 \Rightarrow m_a(7) = 2 \neq 1 = m_g(7)$

$k = \frac{1}{2} \Rightarrow m_a(7) = 1 = m_g(7) \quad m_a\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \neq 1 = m_g\left(\frac{3}{2}\right).$

$$\det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 3 & -1 \\ 3 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 21$$

AUTOVALORI: $\lambda = 0$, $\lambda = +3$, $\lambda = +7$

$\mathrm{Ker}(A - 0I) = \mathcal{L}((1,-1,1)) = V_0$

$\mathrm{Ker}(A - 3I) = \mathcal{L}((1,-1,-2)) = V_3$

$\mathrm{Ker}(A - 7I) = \mathcal{L}((1\ 1\ 0)) = V_7$

MATRICE DIAGONALE SIMILE AD A: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

MATRICE DIAGONALIZZANTE NON ORTOGONALE $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

MATRICE DIAGONALIZZANTE ORTOGONALE

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

colonne normalizzate.