DIAGONALIZZABILITÀ DI MATRICI

Sia $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$ un endomorfismo

→ Applicazione lineare in cui dominio e codominio coincidono.

§ In particolare A è la matrice di f_A rispetto la base canonica. $((1 0 0 \ldots 0), (0 1 0 \ldots 0), \ldots (0 0 \ldots 1))$

Se cambiamo base di $\mathbb{K}^n$, prendiamo una base $\mathcal{B}'$

⇒ posto ${}^T P$ matrice di cambiamento di base abbiamo che rispetto $\mathcal{B}'$ la matrice di f_A sarà $P^{-1}AP$.

le matrici A ed $A' = P^{-1}AP$ rappresentano la stessa funzione lineare f_A rispetto a basi differenti.

N.B $\det(A) = \det(A')$

$rk(A) \overset{n-}{=} \dim \ker f_A = rk(A')$.

Def: Due matrici $A, A' \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono dette simili se $\exists\, P \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che $\boxed{P^{-1}AP = A'}$ ovvero

$$\boxed{AP = PA'}$$

Matrici simili rappresentano il medesimo endomorfismo rispetto basi differenti.

OSS: la relazione "essere simili" è una relazione di equivalenza su $\mathbb{K}^{n,n}$.

DIM: $A \sim A$ infatti $A = I^{-1} A I$

$A \sim B \Rightarrow B = P^{-1} A P \Rightarrow A = P B P^{-1}$ e posto $Q = P^{-1}$

$A = Q^{-1} B Q \Rightarrow B \sim A$

$A \sim B$ & $B \sim C \Rightarrow B = P^{-1} A P,\ C = Q^{-1} B Q \Rightarrow$

$$\Rightarrow C = Q^{-1}(P^{-1} A P) Q = (Q^{-1} P^{-1}) A (PQ) =$$

$$= (PQ)^{-1} A (PQ) \Rightarrow A \sim C.$$

$\square$

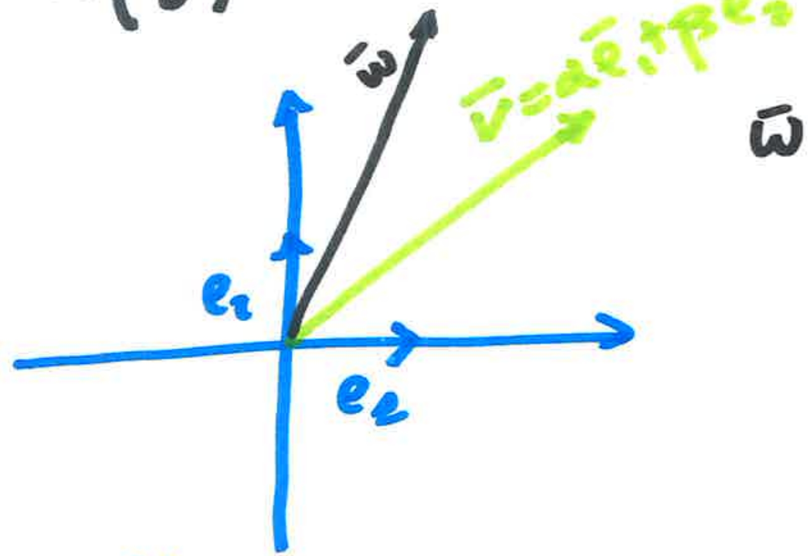
ogni volta che si ha una relazione di equivalenza si vogliono cercare dei rappresentanti per le classi di forma la più semplice possibile...

OSS: In generale se $\bar{x} \in \mathbb{K}^n \Rightarrow \bar{y} = f_A(\bar{x}) = A\bar{x}$ è un vettore che non è direttamente legato ad $\bar{x}$

$\mathbb{R}^2$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix}$ $\quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



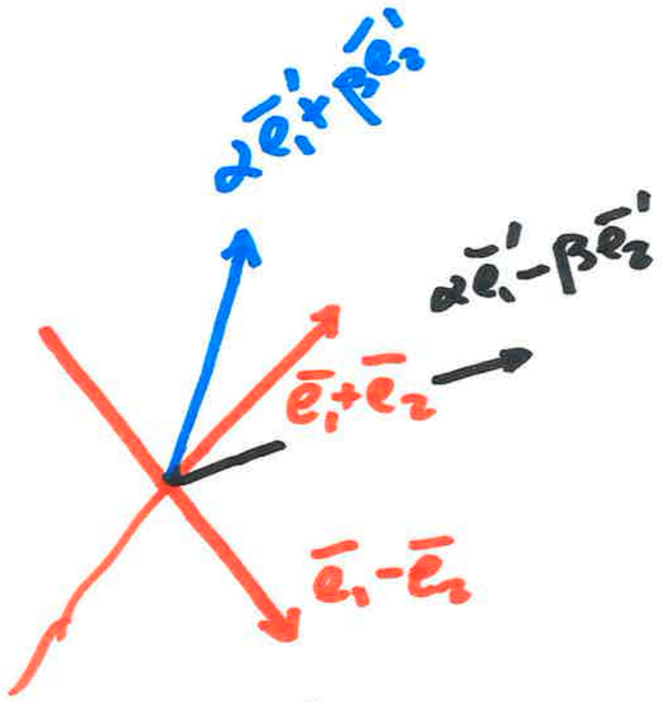
$\bar{\omega} = f(\bar{v}) = \beta\bar{e}_2 + \alpha\bar{e}_1$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \bar{e}_1'$

$\bar{e}_1 - \bar{e}_2 = \bar{e}_2'$



$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

La matrice A' preserva le direzioni dei vettori della base $\mathcal{B}'$! $\Rightarrow A'$ è una matrice diagonale.

$$\cancel{Ax}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

entrambe le entrate dipendono da x e da y

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{dipende solo da } x \\ \leftarrow \text{dipende solo da } y. \end{matrix}$$

Def: Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Si dice autovettore per A di autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$ ogni vettore $X \in \mathbb{K}^n$ con $X \neq \underline{0}$ tale che

$$\boxed{AX = \lambda X.}$$

(in inglese eigenvector; eigenvalue).

gli autovettori corrispondono alle direzioni unite per A.

Def.: Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è detta diagonalizzabile in $\mathbb{K}$ se essa è simile ad una matrice diagonale D.
(in altre parole se $\exists P \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che

$$\boxed{P^{-1}AP = D}$$

o, equivalentemente $\boxed{AP = PD}$).

ogni matrice P tale che $P^{-1}AP = D$ con D diagonale è detta matrice diagonalizzante per A e D.

Teorema: $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}^n$ ammette una base di autovettori per A.

__DIM__: Supponiamo $\mathbb{K}^n$ ammetta una base di autovettori $(P_1 \dots P_n)$

e consideriamo la matrice P che ha come colonne le componenti risp. la base canonica di tali vettori.

$$AP = (AP_1 \dots AP_n) = (\lambda_1 P_1 \dots \lambda_n P_n) =$$

$$= P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = PD \quad \text{con } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

viceversa: supponiamo $AP = PD$ con $P \in GL(n, \mathbb{K}) \Rightarrow$

$$(AP_1 \dots AP_n) = (d_{11} P_1 \dots d_{nn} P_n) \Rightarrow$$

$AP_i = d_{ii} P_i$ e quindi le colonne di P sono autovettori $\Rightarrow$

poiché $P \in GL(n, \mathbb{K})$ e quindi $\det(P) \neq 0$ le colonne di P sono una base di $\mathbb{K}^n$ fatta da autovettori $\square$

Come trovare (se esiste) una base di autovettori di $\mathbb{K}^n$?

cosa significa $X \neq \underline{0}$ autovettore?

significa $\exists \lambda \in \mathbb{K}$: $AX = \lambda X$

cioè $AX - \lambda X = \underline{0}$

ovvero $(A - \lambda I)X = \underline{0}$ (*).

con $X \neq \underline{0}$

OSSERVIAMO CHE (*) È POSSIBILE $\iff$ il sistema dato non è di Cramer (altrimenti $\exists!$ sol $X = \underline{0}$).

$\Rightarrow$ deve essere $rk(A-\lambda I) < n$ cioé

$$|A-\lambda I| = 0$$ (equazione caratteristica)

In particolare se $|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow rk(A-\lambda I) < n$

$\Rightarrow Ker(A-\lambda I) \neq \{\underline{0}\}$. $\Rightarrow \exists X \neq \underline{0}$ tale che

$X \in Ker(A-\lambda I)$.

Autovettori esistono di autovalore $\lambda \Leftrightarrow$

$|A-\lambda I| = 0$.

<u>Def</u>: Si dice <u>spettro</u> di A l'insieme di tutti gli autovalori di A.

$$Spec(A) := \{\lambda : |A-\lambda I| = 0\}.$$

Si dice <u>autospazio</u> di A di autovalore $\bar{\lambda} \in \mathrm{Spec}(A)$ il sottospazio $V_{\bar{\lambda}} := \{X \mid (A - \bar{\lambda} I)X = \underline{0}\} = \ker(A - \bar{\lambda} I)$.

Chiamiamo <u>molteplicità geometrica</u> di $\bar{\lambda} \in \mathrm{Spec}(A)$ il valore $m_g(\bar{\lambda}) := \dim V_{\bar{\lambda}} = n - \mathrm{rk}(A - \bar{\lambda} I)$.

posto $\bar{\lambda} \in \mathrm{Spec}(A)$ si dice <u>molteplicità algebrica</u> di $\bar{\lambda}$ il numero di volte $m_a(\bar{\lambda})$ in cui $\bar{\lambda}$ è radice della equazione caratteristica.

$$m_a(\bar{\lambda}) = i \iff (\lambda - \bar{\lambda})^i \mid |A - \lambda I| \ \& \ (\lambda - \bar{\lambda})^{i+1} \nmid |A - \lambda I|.$$

OSS: Due matrici simili A, A' hanno lo stesso determinante, la stessa eq. caratteristica, (gli stessi autovalori e le stesse molteplicità algebriche) e le stesse molteplicità geometriche.

→ queste sono proprietà che risultano essere "intrinseche" nel senso che non cambiano al cambiare della base → sono proprietà "in qualche modo" delle applicazioni lineari.

DIM: $A' = P^{-1}AP \Rightarrow \det(A' - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) =$

$= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) =$

$= \cancel{\det}\ \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(P) =$

$= \det(A - \lambda I)$

per $\lambda = 0 \Rightarrow \det(A') = \det(A)$

in generale: stessa eq. caratteristica

$\Rightarrow$ stesse radici

$\Rightarrow$ stessi autovalori e ma.

$$rk(A' - \lambda I) = rk(P^{-1}AP - \lambda I) =$$

$$= rk(P^{-1}(A - \lambda I)P) \quad \text{ma } P \text{ invertibile}$$

$$= rk(A - \lambda I)$$

$\Rightarrow$ stesse mg.

Vogliamo cercare una base di autovettori di $\mathbb{K}^n$.

$\rightarrow$ la cerchiamo prendendo vettori dai vari autospazi. $\quad Spec(A) = \{\lambda_1 \dots \lambda_k\}$

$$V_{\lambda_1} \quad V_{\lambda_2} \quad \dots \quad V_{\lambda_k}$$

C. Necessaria è che

$$\sum_{\bar{\lambda} \in Spec(A)} V_{\bar{\lambda}} = \mathbb{K}^n$$

Teorema: Gli autospazi di A sono in somma diretta.

$$\bigoplus_{\bar{\lambda} \in Spec(A)} V_{\bar{\lambda}}$$

conseguenza: A diagonalizzabile $\iff \exists$ base di autovettori $\iff \dim \bigoplus_{\bar{\lambda} \in Sp(A)} V_{\bar{\lambda}} = n \iff$

$$\iff \boxed{\sum m_g(\bar{\lambda}) = n}$$

<u>DIM</u>: per induzione sul numero k di autospazi:

$k=2$: Siano $\lambda \neq \mu$, $\lambda, \mu \in \mathrm{Spec}(A)$.

$\Rightarrow$ se $\bar{x} \in V_\lambda \cap V_\mu \Rightarrow \begin{matrix} A\bar{X} = \lambda \bar{X} \\ A\bar{X} = \mu \bar{X} \end{matrix}$

$\Rightarrow \lambda X = \mu \bar{X} \Rightarrow (\lambda - \mu)\bar{X} = \underline{0}$

però $\lambda \neq \mu \Rightarrow X = \underline{0} \Rightarrow V_\lambda \oplus V_\mu$.

$(k-1) \Rightarrow k$ $\quad X \in V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_k}$

e supponiamo

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_k = X_1' + X_2' + \dots + X_k'$$

con $X_i, X_i' \in V_{\lambda_i}$

$$AX = A(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = AX_1 + AX_2 + \dots + AX_n =$$
$$= \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n =$$
$$= \lambda_1 X_1' + \lambda_2 X_2' + \dots + \lambda_n X_n'.$$

$$\lambda_1 X = \lambda_1 X_1 + \lambda_1 X_2 + \dots + \lambda_1 X_n =$$
$$= \lambda_1 X_1' + \lambda_1 X_2' + \dots + \lambda_1 X_n'.$$

$$(AX - \lambda_1 X) = (\lambda_2 - \lambda_1) X_2 + (\lambda_3 - \lambda_1) X_3 + \dots + (\lambda_k - \lambda_1) X_k$$
$$= (\lambda_2 - \lambda_1) X_2' + (\lambda_3 - \lambda_1) X_3' + \dots + (\lambda_k - \lambda_1) X_k'$$

questo vettore appartiene a $V_{\lambda_2} \oplus V_{\lambda_3} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

(e la somma è diretta per ipotesi induttiva: ci sono $k-1$ autospazi!).

$\Rightarrow$ ~~AX~~ $(\lambda_i - \lambda_1) X_i = (\lambda_i - \lambda_1) X_i' \quad \forall i = 2 \dots k$

poiché gli autovalori λ_1 e λ_i $i \neq 1$ sono distinti ne segue $X_i = X_i'$ $\forall i = 2 \dots k$.

$$X = X_1 + (X_2 + \dots + X_k) =$$
$$= X_1' + (X_2 + \dots X_k) \Rightarrow X_1 = X_1' = X - (X_2 + \dots + X_k)$$

quindi X si scrive in modo unico come somma di vettori di $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k}$ $\Rightarrow$ la somma degli autospazi è diretta.

$\square$

DIAGONALIZZARE:

1) calcolare $Spec(A)$
2) $\forall \bar{\lambda} \in Spec(A)$ calcolare $\dim V_{\bar{\lambda}} = m_g(\bar{\lambda})$
3) Se $\sum_{\bar{\lambda} \in Spec(A)} m_g(\bar{\lambda}) = n \rightarrow$ DIAGONALIZZABILE.

4) Se diagonalizzabile $\forall \bar{\lambda} \in Spec(A)$ trovare una base di $V_{\bar{\lambda}}$ e poi come base di $\mathbb{K}^n$ prendere l'unione delle basi degli autospazi.

Teorema: Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Allora $\forall \bar{\lambda} \in Spec(A)$:

$$1 \leq m_g(\bar{\lambda}) \leq m_a(\bar{\lambda}). \qquad (*)$$

CONSEGUENZA: Se A è diagonalizzabile $\Rightarrow$ deve essere $\sum m_a(\bar{\lambda}) = n$ in quanto sommando (*) su $\bar{\lambda} \in Spec(A)$

$$|Spec(A)| \leq \sum m_g(\bar{\lambda}) = n \leq \sum m_a(\bar{\lambda}) \leq n$$

(in quanto l'eq. caratteristica ha grado n ~~vista da~~ e un'equazione di grado n ha al più n soluzioni).

Inoltre se $m_g(\bar{\lambda}) \leq m_a(\bar{\lambda})$ $\forall \bar{\lambda}$ $\Rightarrow$ affinché $\sum m_g = \sum m_a$ serve $m_g(\bar{\lambda}) = m_a(\bar{\lambda})$ $\forall \bar{\lambda}$

Def: Un autovalore $\bar{\lambda} \in Spec(A)$ è detto regolare se $m_a(\bar{\lambda}) = m_g(\bar{\lambda})$.

$\Rightarrow$ Una matrice A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ tutti i suoi autovalori appartengono a $\mathbb{K}$ (cioè tutte le radici del polinomio caratt. sono in $\mathbb{K} \Rightarrow \sum m_a(\bar{\lambda}) = n$) e sono tutti regolari ($\Rightarrow m_a(\bar{\lambda}) = m_g(\bar{\lambda})$).

DIM: $1 \leq m_g(\bar{\lambda})$ é ovvio in quanto

$$|A - \bar{\lambda}I| = 0 \Rightarrow rk(A - \bar{\lambda}I) \leq n-1$$

$$\Rightarrow m_g(\bar{\lambda}) \geq n - (n-1) = 1.$$

$m_g(\bar{\lambda}) \leq m_a(\bar{\lambda})$.

La molteplicità algebrica è sempre almeno tanto quanto la molteplicità geometrica.

Sia $i = m_g(\bar{\lambda})$ e siano $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$ i vettori di una base di $V_{\bar{\lambda}}$.

completiamo questa base a base di $\mathbb{K}^n$ e mettiamo tutto quanto in colonna. costruendo una matrice P.

le prime i ~~righe~~ colonne di P sono autovettori di A di autovalore $\bar{\lambda}$

$P^{-1}AP =$

In particolare $P^{-1}AP$ è la matrice che ha come prime i colonne le immagini dei vettori $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$ secondo A rispetto la base data da $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i \, \bar{w}_1 \dots \bar{w}_{n-i})$.

$\Rightarrow$ queste colonne saranno del tipo

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda} & 0 & \dots \\ 0 & \bar{\lambda} & \dots \\ \vdots & 0 & \bar{\lambda} \\ \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Il resto della matrice "non ci interessa tanto".

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} \bar{\lambda} I_i & M \\ \hline 0 & W \end{array}\right]$$

calcolo il polinomio caratteristico di $P^{-1}AP$ che coincide col polinomio caratteristico di A

$$\det(P^{-1}AP - \lambda I) = \left|\begin{array}{c|c} \bar{\lambda} I_i - \lambda I_i & M \\ \hline 0 & W - \lambda I_{n-i} \end{array}\right| =$$

$$= (\bar{\lambda} - \lambda)^i \, |W - \lambda I_{n-i}|$$

$$\Rightarrow m_a(\bar{\lambda}) \geq i = m_g(\bar{\lambda}). \qquad \square$$

N.B in generale le molteplicità possono essere molto differenti!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Spec} A = \{2\}.$$

$$m_a(2) = 4$$

$$m_g(2) = 4 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$\square$