prodotti scalari.

1) prod. scalare = forma bilineare simmetrica.

$$b(\bar{x},\bar{y}) = \alpha \quad \text{con} \quad b(\bar{x},\bar{y}) = b(\bar{y},x)$$

2) la nozione di $\perp$ = ortogonalità $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow b(\bar{a},\bar{b}) = 0$

3) $\bar{v}$, $\bar{w}$ con $\bar{w} \cdot \bar{w} \neq 0$ si può sempre scrivere

$$\bar{v} = \bar{v}_{\parallel} + \bar{v}_{\perp} \quad \text{con}$$

$$\bar{v}_{\parallel} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w} \qquad \bar{v}_{\perp} = \bar{v} - \bar{v}_{\parallel} \quad \text{ma} \quad \bar{v}_{\perp} \in \omega^{\perp}$$

Nozione di base ortogonale / ortonormale.

Sia $\bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$. Si dice che $\bar{v}$ è un <u>versore</u> se
$\bar{v} \cdot \bar{v} = 1$, e

Una sequenza di vettori $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k)$ è detta ortogonale se $\forall \bar{e}_i, \bar{e}_j \in (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_K)$: $\quad \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0$ se $i \neq j$

ortonormale se $\forall \bar{e}_i, \bar{e}_j \in (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_K)$: $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

$\parallel$

ORTOGONALE + DI VERSORI

<u>Lemma</u>: Sia $S = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_K)$ una sequenza ortogonale tale che $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i \neq 0 \ \forall i$.

Allora S è libera.

<u>DIM</u>: $\displaystyle\sum_{i=1}^{K} \alpha_i \bar{e}_i = \underline{0}$ supponiamo.

$$\bar{e}_j \cdot \sum_i \alpha_i \bar{e}_i = \bar{e}_j \cdot \underline{0} = 0$$

$$\parallel$$

$$\sum_i \alpha_i (\bar{e}_j \cdot \bar{e}_i) = \alpha_j (\bar{e}_j \cdot \bar{e}_j) \Rightarrow \text{Deve essere}$$

$$\alpha_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots K.$$

$\square$

In particolare $\forall$ sequenza ortonormale è libera.

DOMANDA 1: Supponiamo $V_n(\mathbb{K})$ abbia una seq. di vettori ortonormale che è anche base. Come si scrive la matrice del prod. scalare rispetto tale sequenza?

RK 1: Ricordiamo che la matrice è del tipo

$$B = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 & \dots & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_n \\ \bar{e}_n \cdot \bar{e}_1 & & \dots & \bar{e}_n \cdot \bar{e}_n \end{pmatrix}$$

ma se $(e_1 \dots e_n)$ ORTONORMALE $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i = 1$

$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0 \ \forall i \neq j$

$\Rightarrow$ in particolare $B = I$.

DOMANDA 2: Come sono fatte le matrici di cambiamento di base fra basi ortonormali?

${}^{T}A$ sia una di esse.

$$I = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice rispetto la} \\ \text{base ortonormale} \\ \mathcal{B}}}{B} = {}^{T}A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice rispetto} \\ \text{la base} \\ \text{ortonormale} \\ \mathcal{B}'}}{B'} A = {}^{T}A I A = {}^{T}A A$$

SONO MATRICI INVERTIBILI TALI CHE $A^{-1} = {}^{T}A$

Def: Una matrice è detta ortogonale se $A \in GL(n, \mathbb{K})$ ed ${}^{T}A = A^{-1}$

N.B le righe/colonne di una matrice ortogonale sono un sistema di vettori di $\mathbb{K}^n$ ORTONORMALE rispetto prod. scalare std. di $\mathbb{K}^n$.

Infatti $${}^TA\,A = \begin{bmatrix} {}^TC_1 \\ {}^TC_2 \\ \vdots \\ {}^TC_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \dots C_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} {}^TC_1C_1 & {}^TC_1C_2 & \dots & {}^TC_1C_n \\ \vdots & & & \\ {}^TC_nC_1 & \dots & & {}^TC_nC_n \end{bmatrix}$$

ma i vettori ${}^TC_i \cdot C_j$ sono proprio il prod scalare std. di C_i e C_j in $\mathbb{K}^n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

NON È ORTOGONALE

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$ è ORTOGONALE.

processo di ortogonalizzazione di Gram/Schmidt. (ortonormalizzazione)

Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di $V_n^\circ(\mathbb{K})$

→ vogliamo ottenere

1) Una base $\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$ ORTOGONALE DI $V_n^\circ(\mathbb{K})$

2) Se possibile una base $\mathcal{B}'' = (\bar{e}_1'' \dots \bar{e}_n'')$ ORTONORMALE di $V_n^\circ(\mathbb{K})$

Tali che $\forall \ 1 \leq j \leq n$ si abbia

$$\mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_j) = \mathcal{L}(\bar{e}_1' \dots \bar{e}_j') = \mathcal{L}(\bar{e}_1'' \dots \bar{e}_j'').$$

1) poniamo $\bar{e}_1' \leftarrow \bar{e}_1$

$$\bar{e}_2' \leftarrow \bar{e}_2 - \frac{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_2}{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_1'} \bar{e}_1'$$

(oss. $\bar{e}_2' \perp \bar{e}_1'$)

$$\bar{e}_3' \leftarrow \bar{e}_3 - \frac{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_3}{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_1'} \bar{e}_1' - \frac{\bar{e}_2' \cdot \bar{e}_3}{\bar{e}_2' \cdot \bar{e}_2'} \bar{e}_2'.$$

$\vdots$

$$\bar{e}_n' \leftarrow \bar{e}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\bar{e}_n \cdot \bar{e}_j'}{\bar{e}_j' \cdot \bar{e}_j'} \bar{e}_j'.$$

<u>oss</u>: 1) vale la proprietà che $\mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i) = \mathcal{L}(\bar{e}_1' \dots \bar{e}_i')$.

2) la base $\mathcal{B}'$ è ortogonale.

<u>oss</u>: $\bar{e}_2' \cdot \bar{e}_1' = \left(e_2 - \frac{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_2}{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_1'} \bar{e}_1'\right) \cdot \bar{e}_1 =$

$$= \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 = \frac{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_2}{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_1'} \bar{e}_1' \cdot \bar{e}_1' =$$

$$= \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 - \bar{e}_1' \cdot \bar{e}_2 = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 = 0$$

Supponiamo che $\forall\ j < i$ tutti i vettori $(\bar{e}_1' \dots \bar{e}_j')$ siano ortogonali fra loro.

poniamo $\bar{e}_i' = \bar{e}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j'}{\bar{e}_j' \cdot \bar{e}_j'} \bar{e}_j'$

se calcoliamo $\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_k' = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_k' - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j'}{\bar{e}_j' \cdot \bar{e}_j'} \bar{e}_j' \cdot \bar{e}_k'$

$= *$

ma $\bar{e}_j' \cdot \bar{e}_k' = 0$ se $k \neq j$ $\Rightarrow$

$$* = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_k' - \frac{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_k'}{\bar{e}_k' \cdot \bar{e}_k'} \left(\bar{e}_k' \cdot \bar{e}_k' \right) = 0$$

$\square$

DATA $\mathcal{B}$ $\rightarrow$ TROVIAMO $\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \ldots \bar{e}_n')$ ORTOGONALE

DATA $\mathcal{B}'$ $\rightarrow$ CERCHIAMO $\mathcal{B}'' = (\bar{e}_1'' \ldots \bar{e}_n'')$ ORTONORMALE.

- se possibile poniamo $\bar{e}_i'' = \dfrac{1}{\sqrt{\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'}} \bar{e}_i'$

se $\sqrt{\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'}$ esiste ed è $\neq 0 \Rightarrow \bar{e}_i''$ é un versore proporzionale ad $\bar{e}_i'$

infatti $\bar{e}''_i \cdot \bar{e}''_i = \frac{1}{\left(\sqrt{\bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_i}\right)^2} \bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_i = 1$

per normalizzare ci serve che tutti i vettori di B' siano tali che $\bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_i$ sia un quadrato.

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ prod. scalare standard.

$(1,2) \in \mathbb{Q}^2$

$(1,2) \cdot (1\ 2) = 1 + 4 = 5$

ma $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

Def $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Un prodotto scalare $\cdot\, V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è detto definito positivo (Euclideo). se $\forall \bar{x} \in V_n$

$\bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0$ e $\bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \iff \bar{x} = \underline{0}$

In particolare il prod. scalare std. su $\mathbb{R}^n$ è definito positivo.

$$(x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = \sum_i x_i y_i = x_1 y_1 + \dots x_n y_n$$

$$(x_1 \dots x_n) \cdot (x_1 \dots x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0 \text{ ed } = 0$$
$$\iff x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

<u>Def</u>: Si dice <u>norma</u> di un vettore $\bar{x} \in V(\mathbb{R})$ una funzione $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ tale che

1) $\forall \bar{x} \in V : \|\bar{x}\| \geq 0$ e $\|\bar{x}\| = 0 \iff \bar{x} = \underline{0}$
2) $\forall \bar{x} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha \bar{x}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|$
3) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V: \quad \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|x\| + \|y\|$

Sia $\bullet : V(\mathbb{R}) \times V(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare Euclideo.

[Se $\bullet$ è una funzione continua si dice che V è uno spazio di Hilbert]

Definiamo $\|\bar{x}\|_2 = \|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \bullet \bar{x}}$.

Teorema $\|\cdot\|_2$ é una norma.

DIM 1) $\|\bar{x}\|_2 \geq 0$ & $\|\bar{x}\|_2 = 0 \iff \bar{x} = \underline{0}$

segue dal fatto che il prod. Euclideo è definito positivo e $\sqrt{a} \geq 0 \quad \forall a \geq 0$.

2) $\|a\bar{x}\|_2 = \sqrt{a\bar{x} \bullet a\bar{x}} = \sqrt{a^2 \bar{x} \bullet \bar{x}} = |a| \sqrt{\bar{x} \bullet \bar{x}} =$
$= |a| \|\bar{x}\|_2$

3) subadditività → segue da quanto vediamo ora.

$f(a+b) \leq f(a) + f(b)$

DISUGUAGLIANZE DI C/S. (Cauchy-Schwarz) E TRIANGOLARE.

C/S: $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V_n^\circ(\mathbb{R}) \qquad |\bar{u} \cdot \bar{v}| \leq \|\bar{u}\|_2 \cdot \|\bar{v}\|_2$

TRIANG: $\|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$

DIM DI TRIANGOLARE DATA C/S.

$$\|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\| \iff$$

$$\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 \leq \|\bar{u}\|^2 + 2\|\bar{u}\|\|\bar{v}\| + \|\bar{v}\|^2$$

ma $\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 = (\bar{u}+\bar{v}) \cdot (\bar{u}+\bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{u} + 2\bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{v} =$

$$= \|\bar{u}\|^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{v} + \|\bar{v}\|^2 \leq \|\bar{u}\|^2 + 2|\bar{u} \cdot \bar{v}| + \|\bar{v}\|^2$$

$$\leq \|\bar{u}\|^2 + 2\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| + \|\bar{v}\|^2 =$$

$$= (\|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|)^2.$$

DIM DI C/S: $|\bar{u}\cdot\bar{v}| \leq \|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|$

se $\bar{u}=\underline{0}$ oppure $\bar{v}=\underline{0} \Rightarrow \bar{u}\cdot\bar{v}=0$ e $\|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|=0$

$\Rightarrow$ <u>OK</u>

CONSIDERIAMO IL VETTORE $\bar{u}+\alpha\bar{v}$ e la funzione

$$f\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \alpha \to \cancel{\|\bar{u}+\alpha\bar{v}\|^2}\ (\bar{u}+\alpha\bar{v})\cdot(\bar{u}+\alpha\bar{v}) \end{cases}$$

$\alpha \to \bar{u}\cdot\bar{u}+2\alpha(\bar{u}\cdot\bar{v})+(\bar{v}\cdot\bar{v})\alpha^2$ e $\bar{v}\cdot\bar{v}\neq 0$

la funzione $f(\alpha)\geq 0$ é sempre non negativa perché il prod. scalare è definito positivo.

In particolare il polinomio $\|u\|^2+2x(\bar{u}\cdot\bar{v})+\|\bar{v}\|x^2$ non può avere 2 radici reali e distinte.

$$\frac{\Delta}{4} \leq 0$$

$$(u \cdot v)^2 - \|\bar{u}\|^2 \cdot \|\bar{v}\|^2 \leq 0$$

$$|(\bar{u} \cdot \bar{v})| \leq \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|$$

$\square$

$$\cancel{|\bar{u} \cdot \bar{v}\|} \quad \frac{|\bar{u} \cdot \bar{v}|}{\|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\|} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|} \leq +1$$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$ cioé $\bar{u} \perp \bar{v} \Rightarrow \dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|} = 0$

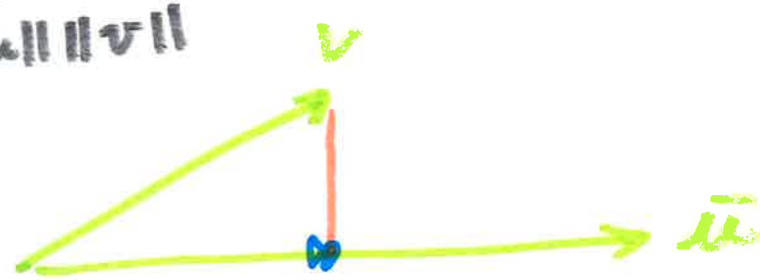
se $\bar{u} = \alpha \bar{v} \Rightarrow \dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|} = \dfrac{\alpha \|\bar{v}\|^2}{|\alpha| \cdot \|v\|^2} = \dfrac{\alpha}{|\alpha|}$

1

-1

chiamiamo coseno dell'angolo fra 2 vettori $\bar{u}, \bar{v} \neq \underline{0}$

il valore $\dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|u\| \|v\|}$



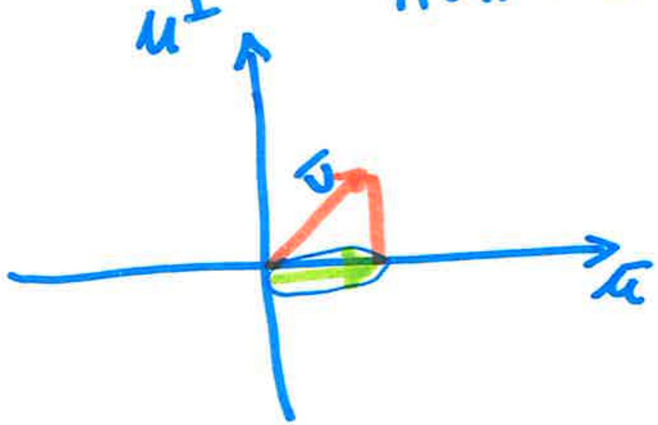
$\bar{v} = \bar{v}_{\parallel} + \bar{v}_{\perp}$

$\bar{v}_{\parallel} = \dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\|^2} \bar{u}$ cos. fra $\bar{u}$ e $\bar{v}$ è

$$\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|u\|^2}\,\frac{\|u\|}{\|\bar{v}\|}$$

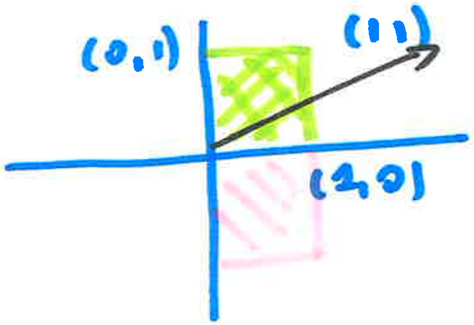
In particolare se $\|u\| = 1 \Rightarrow$
$\|\bar{v}\| = 1 \Rightarrow \cos\widehat{u \cdot v} =$

$$= \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|u\|\,\|v\|} =$$



$$\bar{v}_{\parallel} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\bar{u}\cdot\bar{u}}\,\bar{u} = \cos\widehat{uv}\cdot\frac{\|\bar{u}\|}{\|\bar{u}\|} = \cos\widehat{uv}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

consideriamo come seno dell'angolo fra 2 vettori

$\bar{u}, \bar{v}$ ~~Ba~~ il valore di

$$\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\|} \quad \text{ove } \bar{w} \in \bar{u}^{\perp}$$

e $\bar{w}$ é tale che messo a componenti in una matrice 2x2 insieme ad $\bar{u}$ rispetto una base fissata, il det di questa matrice é >0.

proiezione ortogonale di un vettore su di un sottospazio. Sia $\bar{v} \in V_n^{\circ}(\mathbb{R})$, $W \leq V_n^{\circ}(\mathbb{R})$

diciamo proiezione ortogonale di $\bar{v}$ su W il vettore $\pi(\bar{v}) = \underset{x \in W}{\operatorname{argmin}} \|\bar{v} - \bar{x}\|$

$\pi(\bar{v})$ é il vettore $\bar{x}$ tale che $\bar{v} - \bar{x}$ sia "il più corto possibile"

a) Variare di $\bar{x}$ in W.

→ cerchiamo il vettore di W "più vicino" a $\bar{v}$

$W = \mathcal{L}(\bar{w})$

NOI SAPPIAMO CHE $\bar{v} = \bar{v}_{\parallel} + \bar{v}_{\perp}$ con $\bar{v}_{\parallel} = \alpha \bar{w}$

$\bar{v}_{\perp} \perp \bar{w}$.

ASSERISCO CHE $\pi(\bar{v}) = \bar{v}_{\parallel}$ e quindi che $[\bar{v} - \pi(\bar{v})] \perp \bar{w}$

$$\bar{v}_{\parallel} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}$$

prendo un vettore $\alpha \bar{w}$ e lo scrivo come

$$\alpha \bar{w} = \bar{v}_{\parallel} + \left(\alpha - \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}}\right) \bar{w}.$$

$$\|\bar v - \alpha\bar w\|^2 = \|\bar v_{\parallel} + \bar v_{\perp} - \alpha\bar w\|^2 =$$

$$= \|\bar v_{\parallel} + \bar v_{\perp} - \bar v_{\parallel} + \underbrace{\left(\alpha - \frac{\bar v\cdot\bar w}{\bar w\cdot\bar w}\right)}_{\beta}\bar w\|^2 =$$

$$= \|\bar v_{\perp} + \beta\bar w\|^2 =$$

$v_{\perp} \perp w$

$$= (\bar v_{\perp} + \beta\bar w)\cdot(\bar v_{\perp} + \beta\bar w) =$$

$$= \|\bar v_{\perp}\|^2 + |\beta|^2\|\bar w\|^2$$

e questo è minimo $\iff \beta = 0$

$\Rightarrow$ se e solamente se $\alpha = \dfrac{\bar v\cdot\bar w}{\bar w\cdot\bar w}$.

ovvero abbiamo che la proiezione ortogonale di $\bar v$ su $\bar w$ è anche il vettore $\bar v_{\perp}$ tale che $\bar v_{\parallel}$ è il "più piccolo" vettore prop. a $\bar w$ tale che $\bar v = \alpha\bar w + \bar x$.