RREF = Row Reduced Echelon Form

$$(A|B) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & B \end{array} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

legato la sol. particolare.

parametri

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \boxed{7} - 3x_2 - 1x_4 - 5x_5 \\
x_2 &= 0 + 1x_2 + 0x_4 + 0x_5 \\
x_3 &= 5 + 0x_2 + 0x_4 - 9x_5 \\
x_4 &= 0 + 0x_2 + 1x_4 + 0x_5 \\
x_5 &= 0 + 0x_2 + 0x_4 + 1x_5 \\
x_6 &= 3 + 0x_2 + 0x_4 + 0x_5
\end{aligned}
$$

II generatore

III gen.

soluzione particolare

I vettore sistema gen. soluzioni omogenee.

$X_0 = (7\ 0\ 5\ 0\ 0\ 3)$ $\qquad \mathcal{L}((-1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0), (-3\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0),$
$(-5\ 0\ -8\ 0\ 1\ 0))$.

Forme bilineari.

Sia $V(\mathbb{K})$ spazio vettoriale.

Una forma $f: V \to \mathbb{K}$ è una funzione definita su V a valori in $\mathbb{K}$. o su prodotti di V per se stesso.

FORMA LINEARE: $f: V \to \mathbb{K}$ tale che

$$\forall \bar{v}, \bar{w} \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}: f(\alpha \bar{v} + \beta \bar{w}) = \alpha f(\bar{v}) + \beta f(\bar{w}).$$

Rappresentata a matrice, una forma lineare $V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ è semplicemente un vettore riga $\in \mathbb{K}^{1,n}$.

$V_n(\mathbb{K})$ $\quad \mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ base

$f : V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ $\quad \mathcal{B}_{\mathbb{K}} = \{1\}$

e quindi la matrice rapp. di f è del tipo

$$\left(f(\bar{e}_1)\ f(\bar{e}_2) \dots f(\bar{e}_n) \right)$$

$$f\left(\sum v_i \bar{e}_i\right) = \sum v_i f(\bar{e}_i) = \cancel{(f(\bar{e}_1) \dots f(v_n}$$

$$\left[f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n) \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

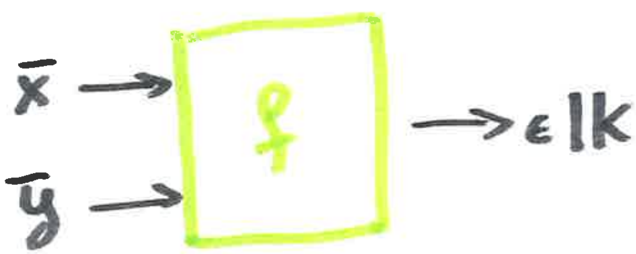
prodotto riga per colonna.

Forma bilineare

$$f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{tale che}$$

1) $\forall \bar{a} \in V$: $f_{\bar{a}} : \begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{K} \\ \bar{x} \to f(\bar{a}, \bar{x}) \end{cases}$ è una forma lineare

2) $\forall \bar{b} \in V$: $f_{\bar{b}} : \begin{cases} V \to \mathbb{K} \\ \bar{y} \to f(\bar{y}, \bar{b}) \end{cases}$ è una forma lineare.



se fissate uno dei 2 input di f $\Rightarrow$ ottenete una forma lineare.

$f : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare $\iff$

$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$: (1) $f(\alpha \bar{a} + \beta \bar{b}, c) =$

$$= \alpha f(\bar{a}, \bar{c}) + \beta f(\bar{b}, \bar{c})$$

&

(2) $f(\bar{a}, \alpha \bar{b} + \beta \bar{c}) =$

$$= \alpha f(\bar{a}, \bar{b}) + \beta f(\bar{a}, \bar{c}).$$

In particolare $\det : \mathbb{K}^{2,2} \to \mathbb{K}$ è una forma bilineare sulle righe degli elementi di $\mathbb{K}^{2,2}$.

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K} \\ (a,b),(c,d) \longrightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \end{cases}$$

verifichiamo che

$$f\left(\alpha(a,b)+\beta(a',b'),\ (c,d)\right) =$$

$$= f\left((\alpha a+\beta a',\ \alpha b+\beta b'),\ (c,d)\right) =$$

$$(\alpha a+\beta a')d-(\alpha b+\beta b')c =$$

$$= \alpha(ad-bc)+\beta(a'd-b'c) = \alpha\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= \alpha f((a,b),(c,d)) + \beta f((a',b'),(c,d)) \qquad \square$$

Similmente $f((a,b),\ \alpha(c,d)+\beta(c',d')) =$

$$= \alpha f((a,b),(c,d)) + \beta f((a,b),(c',d')).$$

osserviamo che $f((a,b),(a,b)) = 0 \quad \forall (a,b) \in \mathbb{K}^2$

e in questo caso si dice che f è alternante

in quanto $f((a,b),(a,b)) = 0$ implica (se $-1 \neq 1$)

$$f((a,b),(c,d)) = -f((c,d),(a,b)).$$

__Def__: Si dice <u>determinante</u> una funzione n-multilineare alternante definita su $V_n(\mathbb{K})$ tale che $\det(I) = 1$

n-multilineare $\rightarrow$ n vettori riga di n elementi

↳ MATRICE QUADRATA

alternante $\rightarrow$ con 2 righe identiche vale 0.

multilineare $\rightarrow$ prop. dei determinanti

Una forma $f: V \times V \to \mathbb{K}$ è detta <u>bilineare simmetrica</u> se f è bilineare e $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V$ si ha $f(\bar{a}, \bar{b}) = f(\bar{b}, \bar{a})$.

Una forma bilineare simmetrica è detta non degenere se $\forall \underset{\bar{a} \neq \underline{0}}{\bar{a} \in V} \; \exists \bar{b} \in V : f(\bar{a}, \bar{b}) \neq 0$.

<u>Def</u>: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale. Una forma bilineare simmetrica (non degenere) su V è detta <u>prodotto scalare</u>.

N.B: prodotto scalare $\neq$ prodotto <u>per</u> scalare prodotto scalare: $\bar{x}, \bar{y} \in V \longrightarrow f(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{K}$

prodotto per scalare: $\alpha \in \mathbb{K}, \bar{x} \in V \longrightarrow \alpha \cdot \bar{x} \in V$

<u>Teorema</u>: Sia $f: V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare e sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una fissata base di V.

Poniamo
$$B = \begin{pmatrix} f(\bar{e}_1,\bar{e}_1) & f(\bar{e}_1,\bar{e}_2) & \dots & f(\bar{e}_1,\bar{e}_n) \\ \vdots & & & \\ f(\bar{e}_n,\bar{e}_1) & \dots & & f(\bar{e}_n,\bar{e}_n) \end{pmatrix}$$

$$B = ((f(\bar{e}_i,\bar{e}_j)).$$

~~Siano $\bar{x} = (x_1 \dots x_n)$ ed $\bar{y} = (y_1 \dots y_n)$~~

Siano $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n$
$\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n \in V$

$$\Rightarrow f(\bar{x},\bar{y}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\bar{e}_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(\bar{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \bar{e}_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = (*)$$

vediamo che la forma f dipende solamente dalle componenti dei vettori $\bar{x}, \bar{y}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e dalla matrice B

$$(*) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 \dots x_n) \begin{bmatrix} f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) \dots & f(\bar{e}_1, \bar{e}_n) \\ \vdots & \\ f(\bar{e}_n, \bar{e}_1) \dots & f(\bar{e}_n, \bar{e}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} =$$

$$(x_1 \dots x_n) \begin{bmatrix} y_1 f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + \dots y_n f(\bar{e}_1, \bar{e}_n) \\ \vdots \\ y_1 f(\bar{e}_n, \bar{e}_1) + \dots + y_n f(\bar{e}_n, \bar{e}_n) \end{bmatrix} =$$

$$= (x_1 \dots x_n) \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} f(\bar{e}_1, e_j)\, y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} f(\bar{e}_n, \bar{e}_j)\, y_j \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j\, f(\bar{e}_i, e_j)$$

il valore di $f(\bar{x}, \bar{y})$ coincide con

$$(x_1 \dots x_n) B \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

<u>**N.B**</u> le componenti di $(x_1 \dots x_n)$ e $(y_1 \dots y_n)$

dipendono dalla base fissata, come pure la matrice B. Il risultato del prodotto scalare No.

OSS: • f è alternante se ogni sua matrice rappresentatrice è tale che ${}^TB = -B$. (B antisimmetrica)

• f è simmetrica se ogni sua matrice rappresentatrice è simmetrica cioè ${}^TB = B$.

Infatti se $f(\bar{x},\bar{y}) = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\bar{y},\bar{x}) = (y_1 \dots y_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Supponiamo $f(\bar{x},\bar{y}) = -f(\bar{y},\bar{x}) \Rightarrow (y_1 \dots y_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$

$$= -(x_1 \dots x_n)\, B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{matrix} (x_1 \dots x_n) \\ (y_1 \dots y_n) \end{matrix} \in \mathbb{K}^n$$

ma in particolare vale per elementi della base canonica di $\mathbb{K}^n$ e si vede che

$$\begin{array}{c} (0\,0 \dots 1 \dots 0) \\ \uparrow \\ i \end{array} B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j \quad = b_{ij} = f(\bar{e}_i, \bar{e}_j).$$

se f è alternante deve essere $f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = b_{ij} =$

$$= -f(\bar{e}_j, \bar{e}_i) = -b_{ji}$$

$(1 \neq -1)$

e quindi ${}^{T}B = -B$.

viceversa se ${}^{T}B = -B \Rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) = {}^{T}\bar{x} B \bar{y} =$

$$= -\left(-{}^t\bar{x}B\bar{y}\right) = -\left({}^t\bar{x}(-B)\bar{y}\right) = -\left({}^t\bar{x}\,{}^tB\bar{y}\right) =$$

matrice 1×1

$$= -{}^t\left({}^t\bar{x}\,{}^tB\bar{y}\right) = -\left({}^t\bar{y}\,{}^tB\bar{x}\right) = -f(\bar{y},\bar{x}) \qquad \square$$

Similmente quando f è simmetrica.

Se f simmetrica $\Rightarrow f(\bar{e}_i,\bar{e}_j) = f(\bar{e}_j,\bar{e}_i) \Rightarrow B = {}^tB$

Se $B = {}^tB \Rightarrow f(\bar{x},\bar{y}) = {}^t\bar{x}By = {}^t\bar{x}\,{}^tB\bar{y} =$

$${}^t\left({}^t\bar{x}\,{}^tB\bar{y}\right) = \left({}^t\bar{y}B\bar{x}\right) = f(\bar{y},\bar{x}).$$

possiamo riconoscere una forma bilineare simmetrica dal fatto che la sua matrice rappresentativa è simmetrica.

Forma bilineare simmetrica standard su $\mathbb{K}^n$

$M_{\mathcal{B}} = I_n$

$$\begin{cases} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n) \longrightarrow (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

prodotto scalare standard.

Quando una forma bilineare simm/alternante è degenere.

cioè quando $\underset{\bar{v} \neq \underline{0}}{\exists \bar{v} \in V} : \forall \bar{w} \in V : f(\bar{v}, \bar{w}) = 0$

$\exists\ \bar{v} = (v_1 \dots v_n)$ tale che

$$(v_1 \dots v_n) B \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

$\forall$ scelta di $(x_1 \dots x_n)$.

$\Rightarrow (v_1 \dots v_n) B = (0\ 0 \dots 0\ 0)$

perché se ci fosse una componente $\neq 0$ in $(v_1 \dots v_n) B$ moltiplicando il vettore riga per il vettore della base canonica che ha esattamente quella componente $= 1$ avremmo un risultato non nullo.

in particolare deve valere

$$ {}^{T}B \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \underline{0} \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq \underline{0} $$

ma questo è possibile $\iff rk(B) < n$

perché altrimenti c'è un sistema di Cramer e l'unica sol. è $\bar{v} = \underline{0}$

quindi la forma bilineare è degenere

$\iff \det(B) = 0.$

prodotti scalari (non degeneri) $\rightarrow$ matrice rapp. invertibile e simmetrica.

prod. scalare std. su $\mathbb{K}^n$ → matrice rappresentativa I_n

$\det(I_n) = 1 \neq 0$

<u>Def</u>: Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $* : V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ un prodotto scalare.

Indicheremo $V_n(\mathbb{K})$ con $V_n^*(\mathbb{K})$.

~~Per ogni~~ $\forall \bar{v}, \bar{w} \in V_n^*(\mathbb{K})$ scriviamo

$$\bar{v} * \bar{w} = *(\bar{v}, \bar{w}).$$

Dato $\bar{v} \in V_n^*(\mathbb{K})$, $\bar{v} \neq \underline{0}$ definisco $\bar{v}^{\perp} := \{\bar{w} \in V_n : \bar{v} * \bar{w} = 0\}$

Teorema: $\bar{V}^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di $V_n(\mathbb{K})$.

DIM: Siano $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{V}^{\perp} \Rightarrow$

$\bar{v} * \bar{y} = 0$ $\Rightarrow \bar{v} * (\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) =$

$\bar{v} * \bar{x} = 0$

$= \alpha(\bar{v} * \bar{x}) + \beta(\bar{v} * \bar{y}) = 0 + 0 = 0$ $\square$

Esempio.

Mettiamoci in $\mathbb{R}^{1,n}$ e consideriamo il vettore $(a_1 \dots a_n)$ e prod. sc. standard

calcoliamo $(a_1 \dots a_n)^{\perp} = \{(x_1, \dots x_n) : (a_1 \dots a_n) * (x_1, \dots x_n) = 0\}$.

$$\{(x_1 \dots x_n) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0\} = (a_1 \dots a_n)^\perp$$

CALCOLARE $(a_1 \dots a_n)^\perp$ CORRISPONDE A RISOLVERE L'EQ. OMOGENEA

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

LA CUI MATRICE INCOMPLETA È PROPRIO $\bar{a}$

Def: Sia $X \subseteq V_n^*(\mathbb{K})$.

Definiamo $X^\perp := \bigcap_{\bar{x} \in X} x^\perp =$

$$= \{(y_1 \dots y_n) : \forall \bar{x} \in X : (x_1 \dots x_n) * (y_1 \dots y_n) = 0\}.$$

$X^\perp$ corrisponde alle soluzioni del sistema lineare omogeneo la cui matrice incompleta è data ~~dalle~~ dai vettori di X presi come vettori riga.

→ questo per prod. scalare standard in $\mathbb{K}^n$.

Esempio
$$\begin{matrix}(1\ 3\ 5\ 7)\\(2\ 0\ 1\ 0)\\(0\ 0\ 1\ 0)\end{matrix} \in \mathbb{R}^4$$

$$\{(1\,3\,5\,7),(2\,0\,1\,0),(0\,0\,1\,0)\}^{\perp} =$$

$$= \left\{ (x_1\, x_2\, x_3\, x_4) \;\middle|\; \begin{matrix}(1\,3\,5\,7)\cdot(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0\\(2\,0\,1\,0)\cdot(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0\\(0\,0\,1\,0)\cdot(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0\end{matrix} \right\} =$$

= spazio soluzioni

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$