prodotto righe per colonne

$$(a_1 \dots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

$A \in \mathbb{K}^{m,n} \quad B \in \mathbb{K}^{n,t}$

$\Rightarrow AB =$ matrice che ha in posizione (i,j) il prodotto della i-esima riga di A per la j-esima colonna di A.

Il valore di $f(\bar{v})$ dipende solamente dai valori di $f(\bar{e}_1)$, $f(\bar{e}_2) \dots f(\bar{e}_n)$ e delle componenti di $\bar{v}$ rispetto $\mathcal{B}_V$

$f(\bar{e}_i) \in W$

$$f(\bar{e}_1) = a_{11}\bar{f}_1 + a_{21}\bar{f}_2 + \dots + a_{m1}\bar{f}_m$$

$$f(\bar{e}_2) = a_{12}\bar{f}_1 + a_{22}\bar{f}_2 + \dots + a_{m2}\bar{f}_m$$

$$\vdots$$

$$f(\bar{e}_n) = a_{1n}\bar{f}_1 + a_{2n}\bar{f}_2 + \dots + a_{mn}\bar{f}_m$$

$$A = (a_{ij})_{i=1;\, j=1}^{m \quad n}$$

Siano $V_n(\mathbb{K})$ e $W_m(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.

$$f: V_n(\mathbb{K}) \to W_m(\mathbb{K})$$

è lineare se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{v}, \bar{w} \in V_n(\mathbb{K})$

$$\boxed{f(\alpha\bar{v} + \beta\bar{w}) = \alpha f(\bar{v}) + \beta f(\bar{w}).}$$

Sia $\mathcal{B}_V = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_n)$ una base di V

$\mathcal{B}_W = (\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m)$ una base di W.

Il generico vettore $\bar{v} \in V$ si scrive come

$$\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 + \dots + v_n\bar{e}_n$$

$$\Rightarrow f(\bar{v}) = f(v_1\bar{e}_1 + \dots + v_n\bar{e}_n) = v_1 f(\bar{e}_1) + v_2 f(\bar{e}_2) + \dots + v_n f(\bar{e}_n)$$

$$f(\bar{v}) = f(v_1\bar{e}_1 + \dots + v_n\bar{e}_n) =$$

$$= v_1 f(\bar{e}_1) + \dots + v_n f(\bar{e}_n) =$$

$$= v_1\left[a_{11}\bar{f}_1 + \dots + a_{m1}\bar{f}_m\right] + \dots + v_n\left[a_{1n}\bar{f}_1 + \dots + a_{mn}\bar{f}_n\right]$$

$$= (v_1 a_{11} + v_2 a_{12} + \dots + v_n a_{1n})\bar{f}_1 +$$

$$(v_1 a_{21} + v_2 a_{22} + \dots + v_n a_{2n})\bar{f}_2 +$$

$$\dots$$

$$+ (v_1 a_{m1} + v_2 a_{m2} + \dots + v_n a_{mn})\bar{f}_n$$

coeff. di $f(\bar{v})$ rispetto $\mathcal{B}_W$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \bar{f}_1 +$$

$$+ \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \bar{f}_2 + \cdots$$

$$+ \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \bar{f}_m \Rightarrow$$

le componenti di $f(\bar{v})$ sono date proprio da

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

__Teorema:__ Sia $f: V_n(\mathbb{K}) \to W_m(\mathbb{K})$ una applicazione lineare. Siano inoltre $\mathcal{B}_V = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ e $\mathcal{B}_W = (\bar{f}_1 \dots \bar{f}_m)$ due basi risp. di V e di W. Poniamo

$$A = ((a_{ij})) \in \mathbb{K}^{m,n}$$

la matrice in cui l'entrata ij è ~~l'i-esima~~ la ~~i~~-esima componente rispetto $\mathcal{B}_W$ del vettore $\bar{e}_j$.

Allora $\forall \bar{v} \in V_n$, posto $\bar{x}^T = (v_1 \dots v_n)$ vettore delle componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}_V$ si ha che il vettore delle componenti di $f(\bar{v})$ rispetto $\mathcal{B}_W$

é AX.

Ex:

$$f \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \to (x+y, z-x). \end{cases}$$

$A \in \mathbb{K}^{2,3}$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (\underset{\bar{e}_1}{(100)}, \underset{\bar{e}_2}{(010)}, \underset{\bar{e}_3}{(001)})$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = (\underset{\bar{f}_1}{(10)}, \underset{\bar{f}_2}{(01)}).$$

$$f(\bar{e}_1) = (1,-1) = 1 \cdot \bar{f}_1 - 1 \cdot \bar{f}_2$$

$$f(\bar{e}_2) = (1,0) = \bar{f}_1$$

$$\bar{f}_2$$

$$f(e_3) = (0,1) =$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

immagini in componenti dei vettori di $\mathcal{B}_V$.

$$AX = {}^T(x+y, -x+z)$$

$$f(7,5,9) \qquad A \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

la condizione che 2 matrici siano moltiplicabili fra loro corrisponde esattamente al fatto che le corrispettive appl. lineari siano componibili.

→ CONSEGUENZA: il prod. di matrici corrisponde alla comp. di funzioni
⇒ è associativo.

$f: V_n \to W_m \quad \to \quad A \in \mathbb{K}^{m,n}$

$g: W_m \to U_k \quad \to \quad B \in \mathbb{K}^{k,m}$.

$BA \in \mathbb{K}^{k,n}$

rappresenta $(g \circ f)$

OSS: Sia f una applicazione lineare e sia A la matrice associata rispetto basi opportune. Allora l'immagine di f è un sottospazio vettoriale generato dai vettori le cui componenti rispetto $\mathcal{B}_W$ sono nelle colonne di A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^T c_1 & {}^T c_2 & \cdots & {}^T c_n \end{bmatrix}$$

ove ${}^T c_i$ vettore colonna di $\mathbb{K}^m$

In componenti:

$$\operatorname{Im}(f) = \left\{ A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \;\middle|\; {}^T(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \right\} =$$

$$= \left\{ \alpha_1 {}^T c_1 + \cdots + \alpha_n {}^T c_n \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{K} \right\} =$$

$$= \mathcal{L}({}^T c_1, {}^T c_2 \cdots {}^T c_n).$$

$\boxed{\dim(\operatorname{Im}(f)) = rk(A).}$ Poniamo $rk(f) = \dim \operatorname{Im}(f)$.

Quando f è iniettiva? $\quad f: V \to W$

$$\ker(f) = \{\bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \underline{0}\}.$$

$\ker(f) \leq V$. Abbiamo visto che

se $\exists\, \bar{x}, \bar{y} \in V: f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \Rightarrow f(\bar{x} - \bar{y}) = \underline{0}$

$\Rightarrow \bar{x} - \bar{y} \in \ker(f)$.

$\Rightarrow f$ iniettiva $\Leftrightarrow \dim \ker(f) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ker f = \{\underline{0}\}$.

Teorema (nullità più rango). $f: V \to W$

chiamiamo $\quad \mathrm{null}(f) := \dim \ker(f)$ nullità

$\mathrm{rk}(f) := \dim \mathrm{Im}(f)$ rango.

$$\boxed{\dim(V) = \mathrm{null}(f) + \mathrm{rk}(f)}$$

<u>DIM</u>: Sappiamo che $\ker(f) \leq V$.

- Se $\ker(f) = \{\underline{0}\} \Rightarrow f$ è iniettiva in particolare l'unico vettore tale che $f(\bar{x}) = \underline{0}$ è $\bar{x} = \underline{0}$.

passando in componenti rispetto $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ vediamo che questo implica che le colonne di ogni matrice A rapp. di f devono essere linearmente indipendenti.

$\Rightarrow \dim \mathcal{L}(C(A)) =$ numero colonne di $a = n$
$= \dim V_n$.

Supponiamo ora $\ker f \neq \{\underline{0}\}$ e sia $\tilde{\mathcal{B}}$ una sua base

$\dim \operatorname{Ker} f = \operatorname{null}(f) = k.$

$\tilde{\mathcal{B}} = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_k)$

completiamo adesso $\tilde{\mathcal{B}}$ a base di V_n
aggiungendo $n-k$ vettori.

$\mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_k \ \bar{f}_1 \dots \bar{f}_{n-k}).$

ASSERTO: $\dim \operatorname{Im}(f) = n-k$

osserviamo che posto $U = \mathcal{L}(\bar{f}_1 \dots \bar{f}_{n-k})$
abbiamo che $f_{|U}$ è iniettiva, infatti

se così non fosse $\operatorname{Ker}(f_{|U}) \neq \underline{0}$
$\Rightarrow \exists\, \bar{w} \in \operatorname{Ker}(f_{|U}) \quad \bar{w} \neq \underline{0}$

ma $\bar{w} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{w} = \underbrace{\alpha_1 \bar{f}_1 + \dots + \alpha_{n-k} \bar{f}_{n-k}}_{\in U} = \underbrace{\beta_1 \bar{e}_1' + \dots + \beta_k \bar{e}_k'}_{\in \operatorname{Ker} f}$$

con non tutti gli $\alpha_i = 0 \Rightarrow$

$\alpha_1 \bar{f}_1 + \dots + \alpha_{n-k} \bar{f}_{n-k} - \beta_1 \bar{e}_1' \dots - \beta_k \bar{e}_k' = \underline{0}$

con coeff. non tutti nulli $\Rightarrow$ ↯.

perché abbiamo una base.

poiché $f|_U$ iniettiva $\dim \operatorname{Im}(f) \geq$

$\geq \dim \operatorname{Im}(f|_U) = n-k.$

Sia $\bar{v} \in V \Rightarrow \bar{v} = \gamma_1 \bar{e}_1' + \dots + \gamma_k \bar{e}_k' + \mu_1 \bar{f}_1 + \dots + \mu_{n-k} \bar{f}_{n-k}$

$$f(\bar v) = \underbrace{f(\delta_1 \bar e_1' + \dots + \delta_k \bar e_k')}_{\substack{\| \\ \underline{0} \\ \text{perché } \bar e_1' \dots e_k' \\ \text{sono in } \ker f}} + f(\underbrace{\mu_1 \bar f_1 + \dots + \mu_{n-k} \bar f_{n-k}}_{\in \mathcal{U}})$$

$$= f(\mu_1 \bar f_1 + \dots + \mu_{n-k} \bar f_{n-k}) = f(\bar u) \in \operatorname{Im}(f|_{\mathcal{U}})$$

Ne segue $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f|_{\mathcal{U}})$

e quindi $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim \operatorname{Im}(f|_{\mathcal{U}}) =$
$= n-k.$

$$\boxed{\dim \ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = n.}$$

OSS: Se $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, fissando come basi le basi canoniche abbiamo che la colonna j-esima della matrice A che rappresenta f contiene esattamente l'immagine del vettore e_j rispetto ad f.

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \longrightarrow (x_1+x_3, x_2+x_5+x_4, x_4+x_1) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$rk(A) = 3 = \dim \mathrm{Im}(f)$

$null(f) = \dim \ker f = 2$

Matrice inversa e teoremi di Laplace.

$$A \in \mathbb{K}^{n,n}$$

A è invertibile $\iff \det(A) \neq 0$

Teorema (Laplace). Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ed indichiamo con A_{ij} il minore di A ottenuto cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna di A.

Allora

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} |A_{i\ell}| = \begin{cases} \det(A) & \text{se } \ell = k \\ 0 & \text{se } \ell \neq k. \end{cases}$$

[II teorema di Laplace]

DIM: $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} |A_{i\ell}|$ con $\ell \neq k$ è il det di una matrice che ha 2 ~~righe~~ colonne uguali (la ℓ-esima è una copia della k esima) $\Rightarrow$ è $= 0$. $\square$

$$A = \begin{array}{c} k=1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \ell=3 \end{array} = (-1)^2 \cdot 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{13}} - 0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{23}} + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{33}}$$

$$- 0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{A_{43}} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$\square$

Teorema: Sia $A = ((a_{ij}))$ una matrice quadrata.

poniamo $\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$

e sia $A^a = ((\Gamma_{ij}))$.

Allora $$\boxed{A \cdot {}^T\!A^a = \det(A) \cdot I_n}$$

l'entrata in posizione (i,j) di

$A \cdot {}^{T}A^{a}$ é data dal prodotto della

i-esima riga di A

$(a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in})$

per la j-esima colonna di ${}^{T}A^{a}$ =

= la j-esima riga di A^{a} (trasposta).

$$\begin{pmatrix} r_{j1} \\ r_{j2} \\ \vdots \\ r_{jn} \end{pmatrix}$$

$$(a_{i1} \cdots a_{in}) \begin{pmatrix} \Gamma_{j1} \\ \vdots \\ \Gamma_{jn} \end{pmatrix} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \Gamma_{jt} =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} a_{it} (-1)^{j+t} |A_{jt}| =$$

$$= \begin{cases} \det(A) & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

quindi $A \, {}^{T}\!A^{a} = \det(A) I_n$. $\square$

Se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ poniamo $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot {}^{T}\!A^{a}$.

Se $X \in \mathbb{K}^n$ ed $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ descritta da una matrice $A \Rightarrow$

$\det(A) \neq 0$

$$AX = y \iff \underbrace{A^{-1}AX}_{= IX = X} = A^{-1}y$$

calcolare la matrice inversa corrisponde a risolvere l'equazione matriciale

$$AX = y \quad \text{con } A \in \mathbb{K}^{n,n}, \ \det(A) \neq 0.$$

Se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow f$ è iniettiva $\Rightarrow AX = y$ ammette un'unica soluzione.

Se $\det(A) = 0 \Rightarrow$

1) $AX = y$ ammette soluzione?

~~sì se e solamente~~

sì se e solamente se $y \in Im(f)$

se e solamente se y appartiene

al sottospazio generato dalle colonne

di $A \iff \rho(A) = \rho(A|y)$

2) Quante sono le soluzioni di

$AX = y$ quando ci sono.

= sono tante quante le possibili

preimmagini di y.

le possibili preimmagini di y

sono "tante quanti" i vettori di

$\ker f \Rightarrow$ diciamo che sono $\infty^{\dim \ker f} = \infty^{n-rk}$ ove $rk = rk(A)$.

Sistemi lineari

Un sistema ~~[illegible]~~ lineare di m equazioni in n incognite sul campo $\mathbb{K}$ è una collezione di m equazioni del tipo

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Un sistema è detto compatibile se $\exists$
$(s_1 \dots s_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che sostituito
$s_1 \dots s_n$ in ogni singola eq. esse risultano
tutte soddisfatte.

Altrimenti è detto incompatibile.

(*) si può riscrivere come

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$ (forma matriciale)

$AX = B$ compatibile $\iff B \in \operatorname{Im}(f_A)$

ove $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ X \to AX \end{cases}$

$B \in \operatorname{Im}(f_A) \iff B$ é c. lineare delle colonne di A

$\iff B \in \mathcal{L}(C(A))$

$\iff \dim \mathcal{L}(C(A)) = \dim \mathcal{L}(C(A) \cup B)$

$\iff \rho(A) = \rho(A|B)$ $\square$

Teorema di Rouché-Capelli: Un sistema lineare $AX = B$ è compatibile $\iff \rho(A) = \rho(A|B)$