Def: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice $m \times n$.

Si dice <u>rango</u> di A, indicato con $\text{rango}(A) = \text{rk}(A)$

$\text{rank}(A) = \rho(A)$ l'ordine k del più grande minore M

$k \times k$ contenuto in A con $\det(M) \neq 0$.

$$\left[\ \rho(A) := \max\{k : \exists M \in \mathbb{K}^{k,k},\ M \text{ minore di } A,\ \det(M) \neq 0\}.\ \right]$$

<u>Teorema</u>: Sia $R(A)$ l'insieme delle righe di A $\subseteq \mathbb{K}^n$

$C(A)$ l'insieme delle colonne di A $\subseteq \mathbb{K}^m$

Allora $\rho(A) = \dim \mathcal{L}(R(A)) = \dim \mathcal{L}(C(A))$.

[Il rango è la dimensione dello sp. vettoriale generato dalle righe/colonne di A.]

Sappiamo che una sequenza di k vettori di $\mathbb{K}^n$ è libera $\iff$ messi a matrice questi k vettori si ha che tale matrice $A \in \mathbb{K}^{k,n}$ contiene un minore M $k \times k$ con $\det M \neq 0$.

DIM (Teorema). Sia $d = \dim \mathcal{L}(R(A)) \Rightarrow$ esistono d righe in A che sono lin. indip. $\Rightarrow$ la sottomatrice A' di A che contiene solamente queste d righe $A' \in \mathbb{K}^{d,n}$ contiene un minore M $d \times d$ con $\det(M) \neq 0 \Rightarrow \rho(A) \geq d$.

Se fosse $\rho(A) > d \Rightarrow$ esisterebbe in A un minore M' con $\det(M') \neq 0$ e M' conterrebbe $d+1$ righe $M' \in \mathbb{K}^{d+1,d+1}$. Ma queste $d+1$ righe sarebbero indipendenti perché la matrice A'' formato solo da esse corr. ad un sistema libero $\Rightarrow \dim \mathcal{L}(R(A)) \geq d+1$ ASSURDO. ↯

Ne segue $\rho(A) = d$.

Viceversa se $\rho(A) = d \Rightarrow \exists$ in $R(A)$ d righe indipendenti (quelle intercettate dal minore $d \times d$ che dà il rango).

Se fosse $\dim \mathcal{L}(R(A)) > d \Rightarrow$ ci sarebbero in $R(A)$ almeno $d+1$ righe indipendenti
$\Rightarrow$ la sottomatrice A' di A formata da queste conterrebbe un minore $(d+1) \times (d+1)$ con $\det \neq 0$
$\Rightarrow \rho(A) \geq d+1$ ASSURDO ↯

$\square$

Es: calcolare

$$\dim W_k \quad \text{ove} \quad W_k = \mathcal{L}((1\,2\,0\,k), (0\,1\,1\,0), (k\,0\,0\,k)) \leq \mathbb{R}^4$$

AL VARIARE DI $k \in \mathbb{R}$.

CALCOLIAMO $\rho(A)$ ove $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

$\rho(A) \geq 2$ perché il minore $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ha det $\neq 0$ $\Rightarrow$ le prime 2 righe sono indip. $\forall k$

DOBBIAMO A PRIORI CONSIDERARE TUTTI E 4 I POSSIBILI MINORI 3×3 $\rightarrow$ vedremo che bastano 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & k \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & k \end{vmatrix}$$

$\downarrow$

$\det = k \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$k=0$ ha una riga di 0 $\Rightarrow \det = 0$

$\downarrow$ $k=0$ ha riga di 0 $\Rightarrow \det = 0$

$\downarrow$ $k=0$ ha riga di 0 $\Rightarrow \det = 0$

ha $\det \neq 0$ se $k \neq 0$ $\rightarrow$

se $k \neq 0 \Rightarrow \dim W_k = 3$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \dim W_k = 3 & \text{se } k \neq 0 \\ \dim W_k = 2 & \text{se } k = 0 \end{array}\right]$$

N.B. calcolare il rango ci dice anche quali sono le righe indipendenti $\rightarrow$ quelle intercettate dal minore che abbiamo trovato di ordine massimo con $\det \neq 0$

$\rightarrow$

Estrarre una seq. libera massimale (=base) dai seg. vettori di $\mathbb{R}^5$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Una base di $\mathcal{L}(R(A))$ è data dai vettori

$(1\,1\,0\,1\,0)$, $(0\,1\,0\,1\,1)$, $(3\,0\,0\,1\,0)$
$(0\,0\,1\,0\,0)$ $(0\,0\,0\,1\,1)$

ed abbiamo $\rho(A) = 5 = \dim \mathcal{L}(R(A))$.

<u>OSS</u>: 1) $\rho(A) = \rho({}^{T}A)$ in particolare $\forall$ cosa che si dice per le righe vale anche per le colonne. (in quanto $\det M = \det {}^{T}M$).

2) $\dim \mathcal{L}(R(A)) = \dim \mathcal{L}(C(A))$ ma

in generale $\mathcal{L}(R(A)) \neq \mathcal{L}(C(A))$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{L}(R(A)) = \mathcal{L}((1\,2\,0\,0\,1), (0\,1\,0\,0\,0)) \subseteq \mathbb{R}^5$$

sono diversi

$$\mathcal{L}(C(A)) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^2$$

3) Se $A \in \mathbb{K}^{m,n} \Rightarrow \rho(A) \leq \min(m,n)$.

Se $\rho(A) = \min(m,n) \Rightarrow$ si dice che A ha rango pieno / rango massimo. (full rank).

A) le righe di una sottomatrice di rango massimo di A sono una base per la copertura lineare di R(A)

B) una sottomatrice di rango massimo di A si trova prendendo le righe di A intersecate da un minore fondamentale di A (ovvero un minore M di dim. massima con $\det M \neq 0$).

→ Teorema degli orlati

Sia A una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$.

Quanti minori $j \times j$ ci sono in A?

Dobbiamo scegliere j righe fra le m righe di A
e j colonne fra le j colonne di A.

per le righe $\Rightarrow$ # possibilità $\binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!}$

per le colonne $\binom{n}{j}$.

$\Rightarrow$ # minori possibili $= \binom{m}{j}\binom{n}{j}$ $\quad j \leq \min(m,n)$.

$\binom{n}{j} =$ # possibili scelte non ordinate di j elementi su n.

scelte ordinate di j elementi su n è

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-j+1) = \frac{n!}{(n-j)!}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-j+1)(n-j)\ldots 1}{(n-j)(n-j-1)\ldots 1}$$

identifichiamo tutte le scelte in cui ci sono i medesimi elementi:

→ identifichiamo tutte le scelte in cui gli elementi sono semplicemente disposti in modo differente.

→ # disposizioni di j elementi

$$j(j-1)\dots 2\cdot 1 = j!$$

scelte non ordinate di j elementi su n possibilità $= \dfrac{n!}{(n-j)!}\cdot\dfrac{1}{j!} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$

coeff. binomiale

$$\binom{n}{j}$$

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} x^{n-j} y^j \binom{n}{j}$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + \binom{3}{1} x^2 y + \binom{3}{2} x y^2 + xy^3 =$$

$$= x^3 + 3x^2 y + 3y^2 x + y^3$$

etc. etc.

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$$

DIMOSTRIAMO CHE

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \binom{n+1}{k+1} = \frac{(1+n)!}{(k+1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n+1)}{(k+1)} \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)}{k+1} =$$

$$= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} =$$

$$= \binom{n+1}{k+1} \qquad \square$$

Triangolo di pascal.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

etc.

possiamo calcolare il rango ~~ogni~~ usando questa proprietà:

<u>Teorema</u>: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n} \Rightarrow \rho(A) = k$ se e solamente se A contiene un minore $M \in \mathbb{K}^{k,k}$ con $\det(M) \neq 0$ ed ogni minore M' con $M' \in \mathbb{K}^{k+1,k+1}$ con M contenuto in M' ha $\det = 0$.

[M' è detto orlato di M]

$\rightarrow$ $\rho(A) = k \iff \exists M$ minore $k \times k$ di A con $\det(M) \neq 0$ ed ogni orlato di M ha $\det = 0$.

ALGORITMO:

DATA $A \to$ ~~scala~~

PONIAMO $i = 0$

$M \leftarrow \emptyset$.

1) SE $\exists$ un minore M' ~~$i \times i$~~ $(i+1) \times (i+1)$ con $\det(M') \neq 0$ e M sottominore di M' $\Rightarrow$ CONTINUIAMO

ALTRIMENTI RESTITUIAMO i

2) poniamo $M \leftarrow M'$

$i \leftarrow i + 1$

3) TORNIAMO AL PUNTO 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 5 & 3 & 9 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 8 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$i=0 \quad M=\emptyset$

$i=1 \quad M=[1]$

$i=2 \quad M=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

$i=3 \quad M=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$i=4 \quad M=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Testo i 3 minori 5x5 che contengono il minore dato

$\Rightarrow$ HANNO TUTTI DET $= 0 \Rightarrow$
$\varrho(A)=4$

DIM Teorema degli orlati:

se $\rho(A)=k$ ed M minore $k \times k$ contenuto in A con $\det(M) \neq 0 \Rightarrow$ OGNI MINORE DI A ~~[illegible]~~ di ordine $> k$ HA DET $= 0 \Rightarrow$ in particolare ogni orlato di M ha $\det = 0 \Rightarrow$ FINE.

DOBBIAMO FAR VEDERE CHE se

M minore di A con $\det(M) \neq 0$ $M \in \mathbb{K}^{k,k}$

e ogni orlato di A ha $\det = 0$

$\Rightarrow \rho(A) = k$.

Siamo sicuri $\rho(A) \geq k$

Supponiamo per assurdo $\rho(A) \geq k+1$.

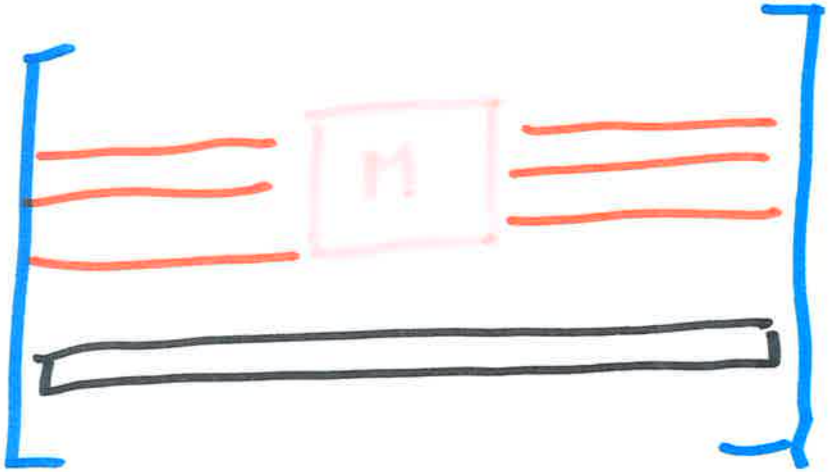
$\Rightarrow$ 1) le righe di A che contengono M sono un sistema libero di righe di $\mathbb{K}^n$.

ma $\rho(A) \geq k+1 \Rightarrow \dim \mathcal{L}(R(A)) \geq k+1$

Quindi $\exists$ almeno un'altra riga in A che è lin. indip. rispetto le righe intercettate da M.

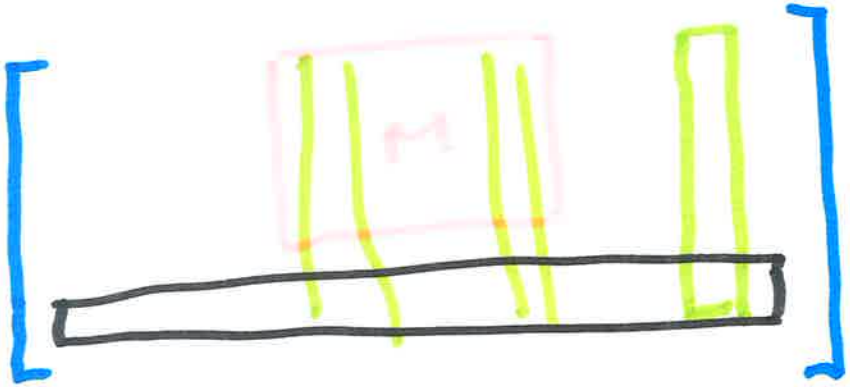
$\rightarrow$ Aggiungiamola alle righe di prima e costruiamo una matrice $A' \in \mathbb{K}^{k+1,n}$ che contiene M come minore e $\rho(A') = k+1$

$A =$



$\in \mathbb{K}^{m,n}$

$A' =$



$\in \mathbb{K}^{k+1,n}$

$\rho(A') = k+1$ ma quindi ci son $(k+1)$ colonne in A' linearmente indipendenti perché $\rho(A') = \rho(\tilde{A}^T)$

$\Rightarrow$ le colonne di A' intercettate da M sono libere $\Rightarrow$

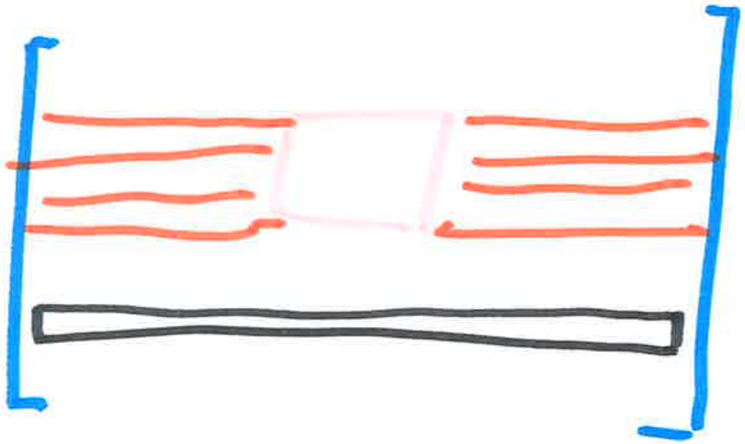
$\Rightarrow \exists$ in A' una colonna = vettore di $\mathbb{K}^{k+1}$ che è l. indip. dalle k colonne intercettate da M $\Rightarrow$ possiamo aggiungere questa colonna alle colonne che avevamo già ed otteniamo una base di $\mathbb{K}^{k+1}$

ma osserviamo che in questo modo ci resta un minore di A' di dimensioni $(k+1)\times(k+1)$ che contiene M ed ha $\det \neq 0$.

Questo è anche un orlato di M in A $\Rightarrow$

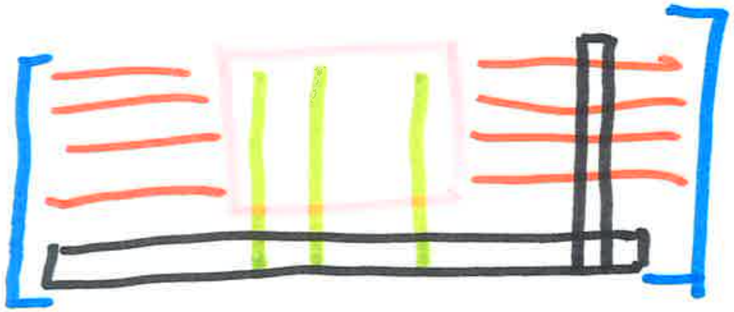
ASSURDO perché per ipotesi tutti gli orlati di M hanno $\det = 0$ $\lightning$ $\Rightarrow \rho(A) = k$ $\square$

$A =$



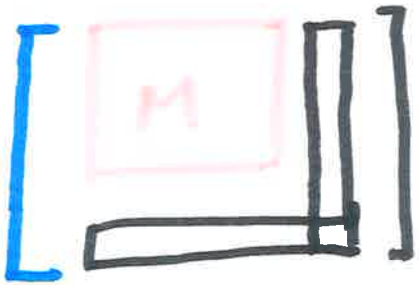
$\in \mathbb{K}^{m,n}$

$A' =$



$\in \mathbb{K}^{k+1,n}$

$A'' =$



$\in \mathbb{K}^{k+1,k+1}$

OSS: RANGO CON GAUSS.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

scambiare le righe fra loro non cambia il rango.

1) Se le righe sono tutte $(0 0 \ldots 0) \Rightarrow \rho(A) = 0$ FINE.

~~ALTRIMENTI SUPPONIAMO che~~

2) Se la prima colonna di A è ${}^t(0 0 0 \ldots 0 0) \Rightarrow$

$$\rho(A) = \rho\left(\underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A'}\right)$$

perché agg. $\underline{0}$ ad un sistema di generatori non cambia lo s.vett. generato e

$$\rho(A) = \dim \mathcal{L}(C(A)).$$
$$= \dim \mathcal{L}(C(A')).$$

possiamo supporre $a_{11} \neq 0$.

$\forall$ riga di A successiva alla prima sottraiamo $\frac{a_{i1}}{a_{11}} R_1$ da essa. $\rightarrow A'$

$$\dim \mathcal{L}(R(A)) = \dim \mathcal{L}(R(A'))$$

ma A' ha la forma $\left[\begin{array}{c|c} 1 & \cdots \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{A''} \\ 0 & \end{array}\right]$.

OSSERVIAMO CHE $\rho(A) = 1 + \rho(A'')$ $\rightarrow$ STESSO ALG. AD A''.

$$\rho\begin{bmatrix}1&2&3&0&1&0\\1&3&4&0&2&1\\0&1&2&1&1&0\\1&2&0&0&1&1\end{bmatrix}=\rho\begin{bmatrix}1&2&3&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&1&2&1&1&0\\0&0&-3&0&0&1\end{bmatrix}=$$

$$1+\rho\begin{bmatrix}1&1&0&1&1\\1&2&1&1&0\\0&-3&0&0&1\end{bmatrix}=$$

$$=1+\rho\begin{bmatrix}1&1&0&1&1\\0&1&1&0&-1\\0&-3&0&0&1\end{bmatrix}=2+\rho\begin{bmatrix}1&1&0&0\\-3&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=2+\rho\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&3&0&1\end{bmatrix}=$$

$$=3+\rho\begin{pmatrix}0&3&0&1\end{pmatrix}=4$$