Somma diretta di 2 sottospazi:

$U \oplus W \iff U \cap W = \{0\}$.

in particolare $\forall$ vettore di $U \oplus W$ si scrive in modo unico come somma di un vettore di U ed uno di W.

Quando la somma di 3 o più sottospazi è diretta?

Si dice che sottospazi $U_1, U_2 \dots U_n$ sono in somma diretta $\iff$ ogni vettore di

$U_1 + U_2 + \dots U_n$

si scrive in modo unico come somma di vettori

$\bar{u}_i \in U_i$

Questo è equivalente a dire che

1) $(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \dots + \mathcal{U}_{n-1})$ é in somma diretta

2) $(\mathcal{U}_1 + \dots + \mathcal{U}_{n-1}) \cap \mathcal{U}_n = \{\underline{0}\}$.

X, Y, Z

$X \oplus Y \oplus Z \iff (X \cap Y) = \{\underline{0}\}$.

$(X + Y) \cap Z = \{\underline{0}\}$.

$X + Y + Z + T$ è diretta $\iff$ $X + Y + Z$ diretta

$(X + Y + Z) \cap T = \{\underline{0}\}$.

$$\iff \begin{cases} X + Y \text{ diretta} \\ (X+Y) \cap Z = \{\underline{0}\} \\ (X+Y+Z) \cap T = \{\underline{0}\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X \cap Y = \{\underline{0}\} \\ (X+Y) \cap Z = \{\underline{0}\} \\ (X+Y+Z) \cap T = \{\underline{0}\} \end{cases}$$

Legame fra matrici, basi e lineare indipendenza.

<u>BASE</u>: Seq. libera di generatori di $V_n(\mathbb{K})$

$\downarrow$

ogni vettore di $V_n(\mathbb{K})$ si scrive in modo unico come c. lineare dei vettori di una base.

Cosa accade se si cambia base?

$\rightarrow$ le componenti della c. lineare cambiano!

Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale di $\dim = n < \infty$

Siano poi $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$ due sue basi.

possiamo sempre scrivere i vettori di $\mathcal{B}'$ in componenti rispetto a $\mathcal{B}$.

$$(*) \quad \begin{cases} \bar{e}'_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + \dots + a_{1n}\bar{e}_n \\ \bar{e}'_2 = a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \dots + a_{2n}\bar{e}_n \\ \vdots \\ \bar{e}'_n = a_{n1}\bar{e}_1 + a_{n2}\bar{e}_2 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n \end{cases}$$

poniamo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n,n}$

$$E = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} \qquad E' = \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix}$$

(*) posso riscriverla formalmente come
$$E' = A E$$
la matrice A è detta matrice di cambiamento di base.

→ A contiene come righe ~~i vettori di~~ le componenti dei vettori di E' rispetto ad E.

→ MOSTRIAMO COME A possa essere usata per legare le componenti di un vettore $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ rispetto le componenti dello stesso vettore rispetto $\mathcal{B}$!

$\bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$.

$\exists! \, (v_1 \dots v_n) \in \mathbb{K}^n : \quad \bar{v} = v_1 \bar{e}_1 + \dots + v_n \bar{e}_n$

$\exists! \, (v_1' \dots v_n') \in \mathbb{K}^n : \quad \bar{v} = v_1' \bar{e}_1' + \dots + v_n' \bar{e}_n'$.

Legame fra $(v_1 \dots v_n)$ e $(v_1' \dots v_n')$.

$$E = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} \qquad E' = \begin{bmatrix} \bar{e}_1' \\ \vdots \\ \bar{e}_n' \end{bmatrix}$$

$$\bar{v} = (v_1 \dots v_n) E = $$
$$= (v_1' \dots v_n') E'$$

$E' = AE$

$$\Rightarrow \quad (v_1 \dots v_n) E = $$
$$(v_1' \dots v_n') E' = \boxed{(v_1' \dots v_n') A} E$$

Sono le componenti di $\bar{v}$ rispetto ad E

$\Rightarrow$ Deve essere (visto che le componenti sono uniche rispetto a $\mathcal{B}$).

$$(v_1 \dots v_n) = (v_1' \dots v_n')A$$

o, prendendo i trasposti

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = {}^tA \begin{bmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{bmatrix} \qquad (*)$$

(*) equazione del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

componenti di $\bar{v}$ rispetto $\mathcal{B}'$

OSS: La matrice A di cambiamento di base deve essere invertibile.

Sia A la matrice che rappresenta i vettori di $\mathcal{B}'$ in componenti rispetto i vettori di $\mathcal{B}$

e A' la matrice che rappresenta i vettori di $\mathcal{B}$ in componenti rispetto i vettori di $\mathcal{B}'$.

$$\Rightarrow \begin{array}{l} E' = AE \\ E = A'E' \end{array} \Rightarrow E = (AA')E$$

componenti di vettori di $\mathcal{B}$ rispetto la base $\mathcal{B}$.

$$E = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A^{-1} = A'$ $\Rightarrow$ A è invertibile perché esiste una matrice A^{-1} tale che $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$.

Se ${}^tA$ ~~tra~~ trasforma le componenti rispetto $\mathcal{B}'$ nelle componenti rispetto $\mathcal{B}$

$\Rightarrow \exists\ {}^tA'$ che trasforma le componenti rispetto $\mathcal{B}$ in componenti rispetto $\mathcal{B}'$.

$\Rightarrow {}^tA'\,{}^tA$ trasforma le componenti rispetto $\mathcal{B}'$ in componenti rispetto $\mathcal{B}'$ $\Rightarrow$ NON CAMBIA NULLA

$\Rightarrow ({}^tA'\,{}^tA) = I_n$

$\Rightarrow A A' = I_n \Rightarrow A' = A^{-1}$

<u>OSS</u>: Sia $GL(n, \mathbb{K}) = \{ M \in \mathbb{K}^{n,n} \mid M \text{ invertibile} \}$.

$GL(n, \mathbb{K})$ è un gruppo.

1) $I_n \in GL(n, \mathbb{K})$

2) $\forall A, B \in GL(n, \mathbb{K}) \quad A \cdot B \in GL(n, \mathbb{K})$

infatti se $\exists A^{-1}, B^{-1} \in GL(n, \mathbb{K})$

$\Rightarrow (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B =$

$= B^{-1} I B = B^{-1} B = I$

(il prodotto di 2 el. di $GL(n, \mathbb{K})$ è un elemento di $GL(n, \mathbb{K})$.

3) $\forall A \in GL(n, \mathbb{K}) \; \exists A^{-1} \in GL(n, \mathbb{K})$.

4) vale la prop. associativa.

Teorema: Una matrice $A \in GL(n, \mathbb{K})$ se e solamente se le righe (le colonne) di A sono linearmente indipendenti e $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.

DIM: Se le righe di A sono l. indip $\Rightarrow$ è sempre possibile scrivere la matrice identica combinandole opportunamente.

Infatti $\rightarrow$ righe di A l. indip $\Rightarrow$ righe di A sono n vettori di $\mathbb{K}^n$ lin. indip $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ esse sono una base di $\mathbb{K}^n$

$\Rightarrow$ in particolare i vettori

$$\bar{e}_1 = (1 0 \dots 0)$$
$$\bar{e}_2 = (0 1 0 \dots 0)$$
$$\vdots$$
$$\bar{e}_n = (0 0 \dots 0 1)$$

di $\mathbb{K}^n$ sono c. lineare delle righe di A

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_1 = b_{11} R_1 + b_{12} R_2 + \dots + b_{1n} R_n = (1 0 \dots 0)$$
$$\bar{e}_2 = b_{21} R_1 + b_{22} R_2 + \dots + b_{2n} R_n = (0 1 0 \dots 0)$$
$$\vdots$$
$$\bar{e}_n = b_{n1} R_1 + b_{n2} R_2 + \dots + b_{nn} R_n = (0 0 0 \dots 1).$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

CALCOLO $\quad BA = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}R_1 + \cdots + b_{1n}R_n \\ b_{21}R_1 + \cdots + b_{2n}R_n \\ \vdots \\ b_{n1}R_1 + \cdots + b_{nn}R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

$\Rightarrow$ A invertibile e $B = A^{-1}$.

Viceversa: supponiamo A invertibile $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, A^{-1} = B \;:\; BA = I \Rightarrow$ chiamando $R_1 \ldots R_n$

le righe di A otteniamo $B \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ i vettori $\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n$ = righe della matrice identica sono c. lineare delle righe di A. Ma essi sono un sistema di generatori per $\mathbb{K}^n$ $\Rightarrow$ anche le righe di A sono un sistema di generatori per $\mathbb{K}^n$ $\Rightarrow$ n vettori generatori di $\mathbb{K}^n$

implica che le righe di A sono una base di $\mathbb{K}^n$ $\Rightarrow$ sono un sistema libero $\square$

<u>OSS</u>: Abbiamo invertito la matrice A cercando

combinazioni lineari delle sue righe che diano la matrice identica.

→ Vedremo che questo è computazionalmente "facile".

→ Vogliamo una funzione che sia "semplice" e che consenta di vedere quando una matrice è invertibile.

$\det(M) = 0 \iff$ le righe di M sono linearmente dipendenti. $\quad M \in \mathbb{K}^{n,n}$

$\iff$ una riga di M è combinazione lineare delle rimanenti.

CONDIZIONI

1) $\det(I) = 1$

2) Se si moltiplica una riga di M per uno scalare $\Rightarrow$ il det. viene moltiplicato pure tale scalare.

3) $\det(M)$ sia multilineare nelle righe.

$$M = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

$$\det M' = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

$$M' = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 R_1 + \ldots + \alpha_n R_n \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

M' = matrice ottenuta da M mettendo al posto della i-esima riga $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot R_j$

$$\det(M') = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \leftarrow \text{i-esima riga.}$$

4) Se in M ci sono 2 righe uguali $\Rightarrow$

$\Rightarrow \det(M) = 0$ (OK perché $-1 \neq 1$)

~~Teorema~~ **Lemma**: 1) Se una riga di M è c.lineare delle rimanenti allora $\det(M) = 0$

2) Se si scambiano 2 righe di $M \Rightarrow$ il det cambia di segno.

3) Se ad una riga di M si aggiunge una c. lineare delle rimanenti r_i $\Rightarrow$ il det di M non cambia.

DIM:

3) dalla prop. 3.

$$\det\begin{bmatrix} R_1 \\ \alpha_1 R_1 + \dots + R_i + \dots \alpha_n R_n \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} =$$

$$= \cancel{\alpha_1 \det\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}} + \cancel{\alpha_2 \det\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}} + \det\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} + \dots$$

$$+ a_n \cancel{\det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}}.$$

OSSERVIAMO CHE PER TUTTI I VALORI $\neq i$ c'è una riga ripetuta $\Rightarrow$ resta per la h solo $\det(M)$ $\#$

1) Supponiamo di scambiare WLOG le righe 1 e 2.

$$\det \begin{bmatrix} R_2 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} R_2 + R_1 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} R_2 + R_1 \\ -R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} R_1 \\ -R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

1) Supponiamo che le righe di M siano legate $\Rightarrow \exists$ una riga (WLOG R_1) che è c. lineare delle rimanenti.

$$\Rightarrow R_1 = \beta_2 R_2 + \dots + \beta_n R_n$$

$$\Rightarrow \det(M) = \det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} R_1 - \beta_2 R_2 \dots - \beta_n R_n \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 0 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} -0 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 0 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = 0$$

□

Teorema: 1) Esiste una ed una sola funzione

$$\mathbb{K}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{K}$$

che soddisfa le proprietà 1-4 (in realtà la 2 è implicita nella 3).

2) Tale funzione è $\neq 0 \iff$ le righe della matrice sono linearmente indip e dunque una base di $\mathbb{K}^n$.

Sia M una matrice.

Se M ha 2 righe linearmente dip $\Rightarrow \det(M) = 0$

Altrimenti mostriamo come si può calcolare $\det M$ e quindi forniamo una dim anche dell'unicità del determinante.

le righe di M sono l. indip. $\Rightarrow$ sono base di $\mathbb{K}^n$

$\Rightarrow \exists$ una c. lineare di righe di M che

dà $(1, 0, 0 \dots 0)$. supponiamo $(1 0 0 \dots 0) =$

$= \alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_n R_n$

$$\det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

sicuramente non tutti gli α_i sono nulli.

se $\alpha_1 = 0 \Rightarrow$ scambio le righe 1 ed i

ove i é ~~la~~ il primo indice $\neq 0$ e

scrivo

$$\det M = \det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = -1 \cdot \det \begin{bmatrix} R_i \\ \vdots \\ R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} =$$

$$= -\det \begin{bmatrix} R_1' \\ R_i' \\ \vdots \\ R_n' \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} R_1' &= R_i \\ R_i' &= R_1 \\ R_j' &= R_j \;\; j \neq i \end{aligned}$$

$$(1\,0\,0 \dots 0) = \alpha_1' R_1' + \alpha_2' R_2' + \dots + \alpha_n' R_n'$$

se sostituisco ad R_1' la riga

$(1\,0 \dots 0) = \alpha_1' R_1' + \dots + \alpha_n' R_n'$ io

ottengo una matrice che ha α_1' volte

il det di $\begin{bmatrix} R_1' \\ \vdots \\ R_n' \end{bmatrix}$

$$\det \begin{bmatrix} R'_1 \\ \vdots \\ R'_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha'_1} \det \begin{bmatrix} \alpha'_1 R'_1 + \alpha'_2 R'_2 + \dots + \alpha'_n R'_n \\ R'_2 \\ \vdots \\ R'_n \end{bmatrix} =$$

$$= (\alpha'_1)^{-1} \det \begin{bmatrix} 1 \; 0 \; 0 \; \dots \; 0 \\ R'_2 \\ R'_3 \\ \vdots \\ R'_n \end{bmatrix} = *$$

ADESSO POSSO SOTTRARRE DA OGNI RIGA SUCCESSIVA LA PRIMA

la prima riga moltiplicata per il valore a'_{2i} $\Rightarrow$ ottengo

$$\det A = (a_1')^{-1} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \; 0 \cdots & 0 \\ 0 & R_2'' & \\ 0 & \vdots & \\ \vdots & & \\ 0 & R_n'' & \end{bmatrix}$$

ove $R_2'' \ldots R_n''$ sono ~~le righe~~ i vettori di $\mathbb{K}^{n-1}$ ottenuti dalle posizioni 2 alle posizioni n di $R_2' \ldots R_n'$.

Iteriamo la procedura sulle righe della matrice $\begin{bmatrix} R_2'' \\ \vdots \\ R_n'' \end{bmatrix}$ fino a che non arriviamo alla matrice identica

$$\det\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&0&1\end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\1&0&1\end{bmatrix} = \cancel{\det}$$

$$(1\,0\,0) = \alpha(1\,1\,1) + \beta(0\,1\,2) + \gamma(1\,0\,1)$$

$$\begin{cases}\alpha+\gamma=1\\ \alpha+\beta=0\\ \alpha+2\beta+\gamma=0\end{cases} \qquad \begin{aligned}&\beta=-\alpha\\ &-\alpha+\gamma=0 \quad \alpha=\gamma=\\ &\alpha+\gamma=1 \implies \alpha=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$= 2\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix} =$$

$$(1\,0) = (1\,2) - (0\,1)$$

$$= 2\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = 2$$

1) $\det(M) \neq 0 \Leftrightarrow$ le righe di M sono libere.

Se le righe di M sono libere $\Rightarrow \det(M) \neq 0$ perché riusciamo con comb. lineari come abbiamo visto a scrivere

$\det(M) = \left(\prod \alpha_j\right) \det I$ con $\alpha_j \neq 0$ opportuni coeff.

Se $\det M \neq 0 \Rightarrow \det(M) = \underset{\text{con } \alpha_j \neq 0}{\left(\prod \alpha_j\right)} (\det I)$ e le righe della matrice identica sono c. lineare delle righe di M

$\Rightarrow$ le righe di M sono generatori di $\mathbb{K}^n$ $\Rightarrow$ le righe di M

sono una base di $\mathbb{K}^n$.

$\square$