Def di somma di sottospazi vettoriali

$$\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$$

$$\mathcal{U} + W = \{ \bar{u} + \bar{w} \mid \bar{u} \in \mathcal{U}, \bar{w} \in W \}$$

- sottospazio somma di $\mathcal{U}$ e W

1) $\mathcal{U} + W \leq V(\mathbb{K})$

2) $\mathcal{U} + W = \mathcal{L}(\mathcal{U} \cup W)$ cioè $\mathcal{U}+W$ è il più piccolo sottospazio che contiene sia $\mathcal{U}$ che W.

<u>DIM</u> 1) $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\bar{u}_1 + \bar{w}_1$, $\bar{u}_2 + \bar{w}_2 \in \mathcal{U} + W$

$$\alpha(\bar{u}_1+\bar{w}_1)+\beta(\bar{u}_2+\bar{w}_2)=$$

$$=(\alpha\bar{u}_1+\beta\bar{u}_2)+(\alpha\bar{w}_1+\beta\bar{w}_2)=$$

$$=\bar{u}_3+\bar{w}_3 \in U+W.$$

$U+W$ é sottospazio.

2) $\underline{0} \in U$, $\underline{0} \in W$ perché sottospazi.

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, \bar{u} \in U \quad \bar{u}+\underline{0} \in U+W \\ \forall\, \bar{w} \in W \quad \underline{0}+\bar{w} \in U+W \end{array}\right\} \; U \cup W \subseteq U+W$$

Sia X un sottospazio tale che $U \leq X$, $W \leq X$

$\Rightarrow \forall\, \bar{u} \in U\ \forall\, \bar{w} \in W : \bar{u}+\bar{w} \in X \Rightarrow (U+W) \subseteq X$

$\Rightarrow U+W \leq X$ e dunque $U+W$ é il più piccolo sottospazio che contiene $U \cup W$ $\square$

N.B

$$\mathcal{U}+W=W+\mathcal{U}$$

$$\mathcal{U}+\{\underline{0}\}=\{\underline{0}\}+\mathcal{U}$$

$$\mathcal{U}+(W+\mathcal{Z})=(\mathcal{U}+W)+\mathcal{Z}.$$

$$\mathcal{U}+\mathcal{U}=\mathcal{U}$$

OSS: $\dim(\mathcal{U}+W) \geq \max\{\dim\mathcal{U}, \dim W\}.$

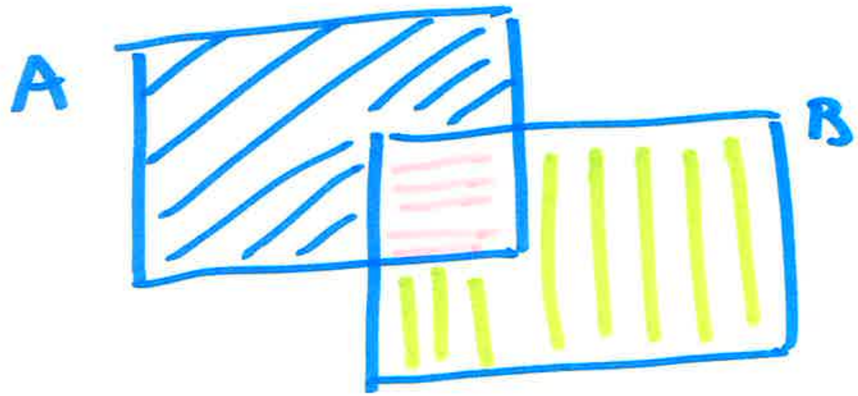
DIMOSTREREMO

$$\dim(\mathcal{U}+W)=\dim\mathcal{U}+\dim W-\dim(\mathcal{U}\cap W)$$

Formula di Grassmann.

(formula che corrisponde allo "stile" del cosiddetto principio di inclusione/esclusione) principio di inclusione/esclusione

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

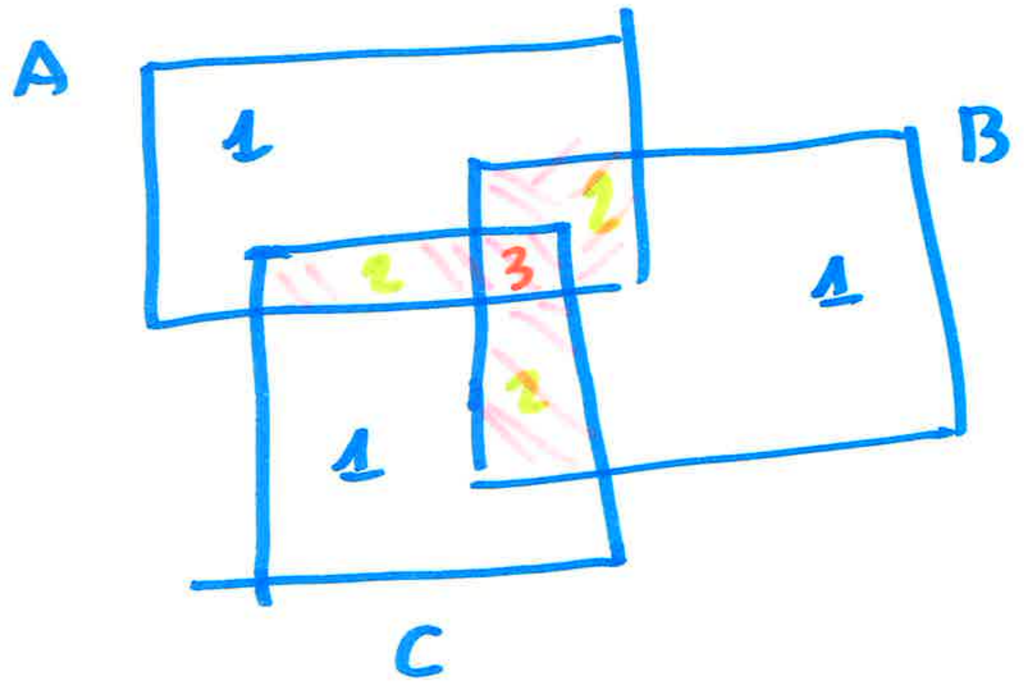


$$|A\cup B| = \underbrace{|A\setminus B|} + |A\cap B| + |B\setminus A|$$

$$= |A| - |A\cap B| + |A\cap B| + |B| - |A\cap B|$$

$$= |A| + |B| - |A\cap B|$$

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$



Def: Siano $\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$. La somma $\mathcal{U}+W$ è detta <u>diretta</u> se $\forall\, \bar{x} \in \mathcal{U}+W\ \exists!\,(\bar{u},\bar{w}) \in \mathcal{U}\times W$ tale che $\bar{x} = \bar{u}+\bar{w}$.

Ogni vettore della somma si scrive in modo unico come somma di un vettore di $\mathcal{U}$ e di un vettore di W.

In questo caso scriveremo $\boxed{\mathcal{U} \oplus W}$.

Teorema: $\mathcal{U} \oplus W \iff \mathcal{U} \cap W = \{\underline{0}\}$.

"La somma di 2 sottospazi è diretta se e solamente se la loro intersezione è banale."

<u>DIM</u>: Supponiamo $\mathcal{U} \oplus W$ in somma diretta e sia $\bar{x} \in \mathcal{U} \cap W$ $\quad \bar{y} \in \mathcal{U} + W$.

$\Rightarrow$ per ipotesi $\exists! (\bar{u}, \bar{w}) \in \mathcal{U} \times W$ tale che

$$\bar{y} = \bar{u} + \bar{w} = (\bar{u} + \bar{x}) + (\bar{w} - \bar{x})$$

e $\quad \bar{u}+\bar{x} \in U, \quad \bar{w}-\bar{x} \in W$

Ne segue che deve essere $\begin{array}{l} \bar{u} = \bar{u}+\bar{x} \\ \bar{w} = \bar{w}-\bar{x} \end{array}$

perché $\bar{y}$ si scrive in modo unico. $\Rightarrow \bar{x} = \underline{0}$

$\Rightarrow U \cap W = \{\underline{0}\}$.

VICEVERSA: Supponiamo $\bar{v} \in U + W$ con $U \cap W = \{\underline{0}\}$.

e che esistano $(\bar{u}_1, \bar{w}_1), (\bar{u}_2, \bar{w}_2) \in U \times W$

con $(\bar{u}_1, \bar{w}_1) \neq (\bar{u}_2, \bar{w}_2)$ e $\bar{v} = \bar{u}_1 + \bar{w}_1 = \bar{u}_2 + \bar{w}_2$

$\Rightarrow \bar{u}_1 - \bar{u}_2 = \bar{w}_2 - \bar{w}_1$ e $\bar{u}_1 - \bar{u}_2 \in U, \bar{w}_2 - \bar{w}_1 \in W$

$\Rightarrow \bar{u}_1 - \bar{u}_2 = \bar{w}_2 - \bar{w}_1 \in U \cap W = \{\underline{0}\}$

$\Rightarrow \bar{u}_1 = \bar{u}_2$ & $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$ quindi $U \oplus W$. $\square$

__OSS__: Siano $\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$ tali che $\mathcal{U} \cap W = \{\underline{0}\}$.
Allora esiste un isomorfismo

$$\varphi \begin{cases} \mathcal{U} \times W \longrightarrow \mathcal{U} \oplus W \\ (\bar{u}, \bar{w}) \longrightarrow \bar{u} + \bar{w} \end{cases}$$

$\ker \varphi = \{(\bar{u}, \bar{w}) \mid \bar{u} + \bar{w} = \underline{0},\ \bar{u} \in \mathcal{U},\ \bar{w} \in W\} =$
$\{(\underline{0}, \underline{0})\}$. INIETTIVA.

CHE SIA SURIETTIVA DERIVA DALLA DEF. DI SOMMA.

__OSS__: Se $\mathcal{U} \cap W \neq \{\underline{0}\}$ ABBIAMO $\ker \varphi = \{(\bar{x}, -\bar{x}) \mid \bar{x} \in \mathcal{U} \cap W\}$.
$\cong \mathcal{U} \cap W$

<u>Oss</u>: Siano $\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$ e siano $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}, \mathcal{B}_W$ due basi rispettivamente di $\mathcal{U}$ e di W.

Allora $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} \cup \mathcal{B}_W$ è un insieme di generatori per $\mathcal{U}+W$ ma, in generale, non è libero!

<u>Oss</u>.
$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W) \subseteq \mathcal{U}+W$$
$$W \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W) \subseteq \mathcal{U}+W \Rightarrow$$
$$\mathcal{L}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W) \subseteq \mathcal{U}+W$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W) = \mathcal{U}+W.$$

In $\mathbb{R}^3$ consideriamo

$\mathcal{U} = \mathcal{L}((1\,0\,0),(0\,1\,0))$ $\quad \mathcal{B}_{\mathcal{U}} = ((1\,0\,0),(0\,1\,0))$

$W = \mathcal{L}((0\,1\,0),(0\,0\,1))$ $\quad \mathcal{B}_W = ((0\,1\,0),(0\,0\,1))$

$$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = ((1\,0\,0),(0\,1\,0),(0\,1\,0),(0\,0\,1))$$

4 vettori di $\mathbb{R}^3$

2 sono identici $\Rightarrow$ LEGATA!

$\mathcal{U} = \mathcal{L}(\mathcal{B}_U)$ $\quad \mathcal{B}_U = ((1\,1\,1),(0\,1\,0))$

$W = \mathcal{L}(\mathcal{B}_W)$ $\quad \mathcal{B}_W = ((1\,0\,0),(0\,0\,1))$

$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = ((1\,1\,1),(0\,1\,0),(1\,0\,0),(0\,0\,1))$ LEGATA

$$\dim(\mathcal{U}+W) \leq \dim \mathcal{U} + \dim W$$

Quando è vero che

$$\dim(\mathcal{U}+W) = \dim \mathcal{U} + \dim W$$

o, in altre parole, è garantito che $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ sia una sequenza libera di vettori?

→ Quando $\mathcal{U} \oplus W$ ovvero $\mathcal{U} \cap W = \{\underline{0}\}$.

HP: $\mathcal{U} \oplus W$

TS: $\dim(\mathcal{U}+W) = \dim(\mathcal{U}) + \dim(W)$

Supponiamo $\mathcal{B}_U = \{\bar{u}_1 \dots \bar{u}_m\}$ $\mathcal{B}_W = \{\bar{w}_1 \dots \bar{w}_n\}$ e $\mathcal{U} \oplus W$

$\Rightarrow$ in particolare $\underline{0} \in U \oplus W$ si scrive in modo unico come

$$\underbrace{\underline{0}}_{} = \underbrace{\underline{0}}_{\in U} + \underbrace{\underline{0}}_{\in W}$$

ma $\underline{0} \in U$ e $\mathcal{B}_U$ base $\Rightarrow$

se $\alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_m \bar{u}_m = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$

$\underline{0} \in W$ e $\mathcal{B}_W$ base $\Rightarrow$

se $\beta_1 \bar{w}_1 + \dots + \beta_n \bar{w}_n = \underline{0} \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0.$

consideriamo una c. lineare di vettori di $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ che dia $\underline{0}$

$$\underbrace{\gamma_1 \overline{u}_1 + \dots + \gamma_m \overline{u}_m}_{\in U} + \underbrace{\delta_1 \overline{w}_1 + \dots + \delta_n \overline{w}_n}_{\in W} = \underline{0}$$

deve essere $\underline{0}$

$\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_m = 0$

deve essere $\underline{0}$

$\Rightarrow \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = 0$

$\Rightarrow$ l'unica c. lineare dei vettori di $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ che dà $\underline{0}$ è quella a coeff. tutti 0 $\Rightarrow$

$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è base $\square$

CONSEGUENZA:

se $\dim U \cap W = 0$ (cioè $U \cap W = \{0\}$ cioè $U \oplus W$)

$$\Rightarrow \dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{=0}$$

Formula di Graßmann. (in generale).

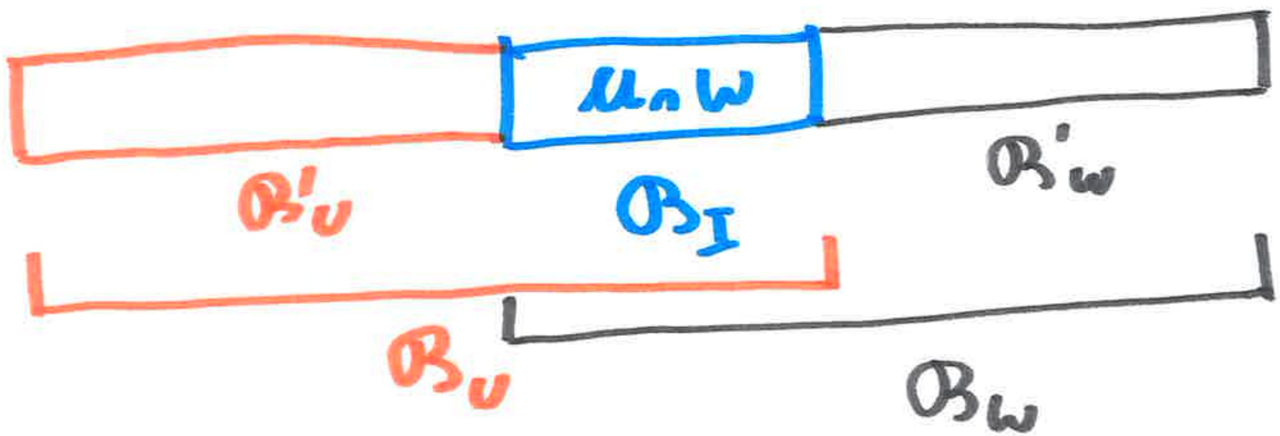
$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Idea della dimostrazione

1) poniamo $I = U \cap W$ e sia $\mathcal{B}_I$ una sua base

2) poniamo $\mathcal{B}'_U$ = vettori da aggiungere ad $\mathcal{B}_I$ per avere una base di $\mathcal{U}$

$\mathcal{B}'_W$ = vettori da aggiungere a $\mathcal{B}_I$ per avere una base di W.



$\dim \mathcal{U} + \dim W - \dim \cancel{\mathcal{B}_I}(\mathcal{U} \cap W)$

$|\mathcal{B}_U| + |\mathcal{B}_W| - |\mathcal{B}_I|$.

- $\mathcal{B}'_U \cup \mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}'_W$ genera $U+W$

  $\Rightarrow$ OVVIO PERCHÉ

  È uguale come insieme

  a $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ e

  $\mathcal{L}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W) = U+W$.

- DA VEDERE: $\mathcal{B}'_U \cup \mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}'_W$ È UNA SEQUENZA LIBERA

  $\Rightarrow$ BASE.

<u>DIM</u>: Siano $\dim U = m$, $\dim W = n$, $\dim U \cap W = i$

Se $i = 0 \Rightarrow U \oplus W$ e abbiamo già dim.

$i > 0$ Sia $\mathcal{B}_I$: base di $U \cap W$.

$+ \gamma_1 \overline{w}_1 + \dots + \gamma_{n-i} \overline{w}_{n-i} = \underline{0}$

MOSTRIAMO CHE DEVE ESSERE

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-i} = \beta_1 = \dots = \beta_i =$$

$$= \gamma_1 = \dots = \gamma_{n-i} = 0$$

<u>OSS e</u>: Non è possibile che sia

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-i} = \gamma_1 = \dots = \gamma_{n-i} = 0$$

e $(\beta_1, \dots \beta_i) \neq (0 0 \dots 0)$

perché $\mathcal{B}_I$ è base e quindi è libera

e se fosse $\beta_1 \overline{e}_1 + \dots + \beta_i \overline{e}_i = \underline{0}$ con

$(\beta_1 \dots \beta_i) \neq (0 0 \dots 0)$ sarebbe legata.

completiamo $\mathcal{B}_I$ a base $\mathcal{B}_U$ di U
aggiungendo $(m-i)$ vettori opportuni.

completiamo $\mathcal{B}_I$ a base $\mathcal{B}_W$ di W
aggiungendo $(n-i)$ vettori.

$\mathcal{B}'_U$	$\mathcal{B}_I$	$\mathcal{B}'_W$
$\bar{u}_1 \dots \bar{u}_{m-i}$	$\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i$	$\bar{w}_1 \dots \bar{w}_{n-i}$

ABBIAMO $(m-i)+i+(n-i) = m+n-i =$
$= \dim U + \dim W - \dim U \cap W$

VETTORI.

prima di pausa: $\mathcal{B}'_U \cup \mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}'_W$ genera $U+W$.

mostriamo che è libera.

Supponiamo (*) $\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \dots + \alpha_{m-i} \bar{u}_{m-i} + \beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_i \bar{e}_i +$

Supponiamo per assurdo che $\mathcal{B}'_0 \cup \mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}'_w$ sia legata $\Rightarrow \exists\, (\alpha_1 \dots \alpha_{m-i}\ \beta_1 \dots \beta_i,\ \gamma_1 \dots \gamma_{n-i}) \neq \underline{0}$

tale che $(*)$ sia valida ma

$$(\beta_1 \dots \beta_i) \neq (0 \dots 0).$$

$$\alpha_1 \overline{u}_1 + \alpha_2 \overline{u}_2 + \dots + \alpha_{m-i} \overline{u}_{m-i} = -(\beta_1 \overline{e}_1 + \dots + \beta_i \overline{e}_i + \gamma_1 \overline{w}_1 + \dots \gamma_{n-i} \overline{w}_{n-i})$$

oss 1: $\alpha_1 \overline{u}_1 + \dots \alpha_{m-i} \overline{u}_i \neq \underline{0}$ perché se fosse $\underline{0} \Rightarrow$ avremmo $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-i} = 0$ perché $\mathcal{B}'_U$ è libera e conseguentemente $-\beta_1 = -\beta_2 = \dots -\beta_i = -\gamma_1 = \dots = -\gamma_{n-i} = 0$ perché

$(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i\ \bar{w}_1 \dots \bar{w}_{n-i})$ base di W. ξ_2

$$\underbrace{\alpha_1\bar{u}_1 + \dots + \alpha_{m-i}\bar{u}_{m-i}}_{\in U} = -\underbrace{(\beta_1\bar{e}_1 + \dots \beta_i\bar{e}_i + \gamma_1\bar{w}_1 + \dots + \gamma_{n-i}\bar{w}_{n-i})}_{\in W}$$

$\in U$ perché c. lineare di vettori di U

$\in W$ perché c. lineare di vettori di W.

$$\Rightarrow \alpha_1\bar{u}_1 + \dots + \alpha_{m-i}\bar{u}_{m-i} \in U \cap W = \mathcal{L}(\mathcal{B}_I)$$

$\Rightarrow \exists\, \delta_1 \dots \delta_i \in K$ tali che

$$\alpha_1\bar{u}_1 + \dots + \alpha_{m-i}\bar{u}_{m-i} = \delta_1\bar{e}_1 + \dots + \delta_i\bar{e}_i$$

se sta nell'intersezione è comb. lineare dei vettori di $\mathcal{B}_I$.

$\Rightarrow \alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_{m-i} \bar{u}_{m-i} - \delta_1 \bar{e}_1 \dots - \delta_i \bar{e}_i = \underline{0}$

$\downarrow$

c. lineare di vettori di $\mathcal{B}_U = \mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}'_U$

che è una base $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-i} = \delta_1 = \dots = \delta_i = 0$

perché è seq. libera $\lightning$ ASSURDO

in quanto si aveva $(\alpha_1 \dots \alpha_{m-i}) \neq (0 0 \dots 0)$.

ABBIAMO CHE L'IPOTESI $\mathcal{B}'_U \cup \mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}'_W$ LEGATA È FALSA $\Rightarrow$ essa è libera e quindi base della somma

$\square$

CONSEGUENZE (per esercizi). $\mathcal{U}, W \leq V_n(\mathbb{K})$

$$\max(\dim \mathcal{U}, \dim W) \leq \dim(\mathcal{U}+W) \leq \min(\dim \mathcal{U} + \dim W, n)$$

$$\max(0, \dim \mathcal{U} + \dim W - n) \leq \dim(\mathcal{U} \cap W) \leq \min(\dim \mathcal{U}, \dim W)$$

Esercizio: in $\mathbb{R}^{3,4}$ quali sono le possibili dimensioni dell'intersezione di 2 sottospazi $\mathcal{U}, W$ con $\dim \mathcal{U} = 7$ e $\dim W = 10$

$\mathcal{U} \cap W \leq \mathcal{U}$ $\quad$ $\mathcal{U} \cap W \leq W$

$\dim (U \cap W) \leq 7$

$\dim U + \dim W = 10 + 7 = 17$

$\dim \mathbb{R}^{3,4} = 12$

Al massimo ~~dim U + dim~~ $\dim (U + W)$ sarà 12

$\dim (U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim (U + W)$

$\geq \cancel{7} + 10 - 12 =$

$17 - 12 = 5$

$5 \leq \dim (U \cap W) \leq 7$