4) OGNI SEQ LIBERA DI $n$ VETTORI IN UNO SPAZIO DI DIM $n$ È DI GENERATORI

5) OGNI SEQ. DI $n$ GENERATORI IN UNO SPAZIO DI DIM $n$ È LIBERA.

$V_n(\mathbb{K})$ = s. vettoriale su $\mathbb{K}$ di dim = $n$

**DIM:** Supponiamo in $V_n(\mathbb{K})$ di avere una sequenza libera di $n$ vettori che non genera $V_n(\mathbb{K})$.

$S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ $\exists\, \bar{w} \in V_n(\mathbb{K}) \setminus \mathcal{L}(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$.

OSSERVIAMO CHE LA SEQUENZA $S' = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n, \bar{w})$ ha $n+1$ vettori ed è libera infatti una sua qualsiasi c. lineare con coeff. non tutti nulli che dia $\underline{0}$

dovrebbe essere del tipo

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n + \beta \bar{w} = \underline{0}$$

con $\beta \neq 0$ (perché altrimenti dovremmo avere $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (0 0 \dots 0)$ by perché $S$ libera).

Questa è una contraddizione per il Lemma di steinitz in quanto in $V_n(\mathbb{K})$ c'è una sequenza di $n$ generatori e $|S'| = n+1 > n$

Allora $\bar{w} = -\beta^{-1}(\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n) \Rightarrow \bar{w} \in \mathcal{L}(S)$ ASSURDO

$\Rightarrow S'$ libera.

$\square$

5) Sia $\mathcal{G} = (\overline{w}_1 \dots \overline{w}_n)$ una sequenza di $n$ generatori di $V_n(\mathbb{K})$. Se $\mathcal{G}$ fosse legata $\Rightarrow$ APPLICANDO il metodo degli scarti successivi otteniamo $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \setminus \{\overline{v}_i\}$ seq. di generatori, ma $|\mathcal{G}'| \leq n-1 < n$ ed in $V_n(\mathbb{K})$ c'è almeno una sequenza libera di $n$ vettori $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ per Steinitz $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ deve essere libera $\square$

**OSS**: Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale finitamente generato. Allora $\exists$ un isomorfismo

$$\varphi : V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^n.$$

(isomorfismo = applicazione lineare biiettiva)

<u>DIM</u>: Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n)$ una base di $V_n(\mathbb{K})$

e consideriamo la funzione

$$\varphi_{\mathcal{B}} : \begin{cases} V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ \bar{v} = v_1\bar{e}_1 + \dots + v_n\bar{e}_n \longrightarrow (v_1 \dots v_n) \in \mathbb{K}^n \end{cases}$$

funzione che associa ad ogni vettore le sue componenti rispetto a $\mathcal{B}$

$\varphi$ è
- lineare
- iniettiva
- suriettiva

$*$

$\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + \dots + v_n\bar{e}_n$

$w = w_1\bar{e}_1 + \dots + w_n\bar{e}_n$

$$\Rightarrow \varphi(\alpha\bar{v} + \beta\bar{w}) = \varphi\big((\alpha v_1 + \beta w_1)\bar{e}_1 + \dots + (\alpha v_n + \beta w_n)\bar{e}_n\big)$$

N.B. DIPENDE DA $\mathcal{B}$ !!

$$= (\alpha v_1 + \beta w_1, \dots \alpha v_n + \beta w_n) =$$

$$= \alpha(v_1 \dots v_n) + \beta(w_1 \dots w_n) = \alpha\varphi(\bar{v}) + \beta\varphi(\bar{w}).$$

* iniettiva e suriettiva perché

A) le componenti di un vettore rispetto a $\mathcal{B}$ ~~sono~~ identificano univocamente il vettore.

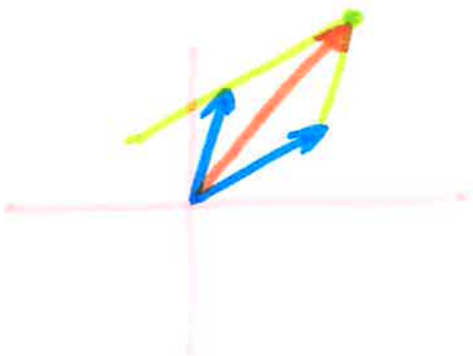
$$\operatorname{Ker}\varphi = \{(v_1 \ldots v_n) \mid v_1\bar{e}_1 + \ldots + v_n\bar{e}_n = \underline{0}\} = \{(0\,0 \ldots 0)\}.$$

perché $\mathcal{B}$ libera

→ iniettiva.

B) $\forall\, (v_1 \ldots v_n) \in \mathbb{K}^n \;\; \exists\, \bar{v} = v_1\bar{e}_1 + \ldots + v_n\bar{e}_n : \varphi(\bar{v}) = (v_1 \ldots v_n)$

SURIETTIVA



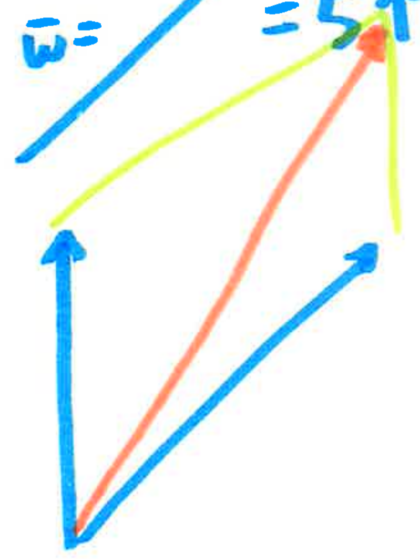
$\mathcal{B} = (\rightarrow, \uparrow)$

$\bar{v}\ \nearrow\ = 3\rightarrow + 3\uparrow \longmapsto (3,3) \in \mathbb{R}^2$

$\square$

$\bar{v} = \uparrow = 5\uparrow + 0\rightarrow \qquad \bar{w} = \nearrow = 5\uparrow + 5\rightarrow$

$\bar{v} + \bar{w} =$



$\varphi(\bar{v}) = (5, 0) \qquad \varphi(\bar{w}) = (5, 5)$

$\Rightarrow \varphi(\bar{v} + \bar{w}) = (10, 5)$

$$\mathbb{R}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \varphi_{\mathcal{B}}$$

$$(a\ b\ c\ d)$$

$$\mathbb{R}^{2,2} \cong \mathbb{R}^4$$

$$\mathcal{B}' = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \varphi_{\mathcal{B}'}$$

$$(a\ c\ d\ b)$$

$$\varphi_{\mathcal{B}} \neq \varphi_{\mathcal{B}'}$$

$$\mathcal{B}'' = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow (a, b-a, c-a, d-a)$$

<u>N.B</u> (per gli esercizi).

In $\mathbb{R}^n$ è facile far confusione fra vettori e loro componenti.

Una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^n$ è detta canonica se ogni vettore di $\mathbb{K}^n$ si scrive in componenti rispetto $\mathcal{B}$ come lui stesso.

$$\mathcal{B} = (\underbrace{(100\ldots0)}_{\bar{e}_1}, (010\ldots0), \ldots \underbrace{(000\ldots1)}_{\bar{e}_n})$$

BASE CANONICA

$(a_1 \ldots a_n) = a_1\bar{e}_1 + \ldots + a_n\bar{e}_n \rightarrow$ ha componenti $(a_1 \ldots a_n)$.

In alcuni esercizi si chiede di lavorare con basi diverse da quella canonica

$(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ vettore

che ha componenti

$(0,1,2) \in \mathbb{R}^3$ rispetto la base

$$\mathcal{B} = ((1\,0\,0), (1\,0\,3), (0\,1\,0))$$

$$[0,1,2]_{\mathcal{B}}$$

Essenzialmente le proprietà di uno spazio vettoriale $V_n(\mathbb{K})$ finitamente generato sono determinate da $\mathbb{K}$ e da $n$ perché esso risulta isomorfo a $\mathbb{K}^n$

Un isomorfismo si può costruire solo dopo che si è fissata una Base e dipende dalla base stessa.

## DIMENSIONE E SOTTOSPAZI

**Teorema:** Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$. Allora $\forall i$ con $0 \leq i \leq n$ $\exists$ sottospazi $W_i \leq V_n(\mathbb{K})$ con $\dim W_i = i$.

Inoltre se $W_n \leq V_n(\mathbb{K})$ con $\dim W_n = n \Rightarrow W_n = V_n$.

$V_n(\mathbb{K})$ non contiene sottospazi di dim $> n$.

**DIM:** Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di $V_n(\mathbb{K})$.

Fissiamo $W_i := \mathcal{L}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i)$ $\quad W_0 = \{\underline{0}\}$.

Allora $\dim W_i = i$

Infatti $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$ è una seq. libera e genera $W_i \Rightarrow$ è base di $W_i$ per $i \geq 1$.

per $i = 0$ $\quad W_i = \{\underline{0}\} \Rightarrow \dim W_i = 0$.

1) Supponiamo $X \leq V_n(\mathbb{K})$ con $\dim X = n$

$\Rightarrow X$ ha una base $\mathcal{B}'$ formata da $n$ vettori linearmente indip. di $V_n \Rightarrow$ tali vettori sono anche una sequenza di generatori per $V_n \Rightarrow$ sono una base di $V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow$

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}') \supseteq V_n \supseteq X = \mathcal{L}(\mathcal{B}').$$

Ne segue $V_n = \mathcal{L}(\mathcal{B}') = X$

3) Se fosse $X \leq V_n(\mathbb{K})$ $\dim(X) \geq n+1 \Rightarrow$ esisterebbe una base di $X$ con $\geq n+1$ vettori

$\Rightarrow$ esisterebbero in $V_n(\mathbb{K})$ $n+1$ vettori linearmente indipendenti ↯ perché $V_n(\mathbb{K})$ è generato da $n$ vettori $\square$

Vedremo cosa succede quando si manipolano i sottospazi di $V_n(\mathbb{K})$

- Intersezione di sottospazi
- Somma di sottospazi

$\longrightarrow$ LEGAMI FRA LE DIMENSIONI.

# Metodo degli scarti successivi

SEQ. DI GENERATORI $V \neq \{0\}$

$\downarrow$

BASE.

(SEQ. LIBERA DI GENERATORI)

<u>N.B.</u> Se sappiamo che la seq. in ingresso genera uno spazio di dimensione $n$ $\rightarrow$ quando ci

restano $n$ vettori sappiamo di avere finito.

Sequenza libera

$\Big\downarrow$ completare a

BASE

si aggiungono vettori sino a che non si ha una sequenza di generatori.

**Teorema:** Sia $\mathcal{B}_0$ una sequenza libera di vettori di $V_n(\mathbb{K})$ e $\mathcal{B}$ una base di $V_n(\mathbb{K})$. Allora è sempre possibile trovare una sottosequenza $\mathcal{B}'$ di $\mathcal{B}$ con $|\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}| - |\mathcal{B}_0|$ tale che $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}'$ sia base di $V_n(\mathbb{K})$.

Es. in $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B}_0 = ((1010), (1100))$$

$$\mathcal{B} = ((1000), (0100), (0010), (0001))$$

$\exists$ due vettori in $\mathcal{B}$ che aggiunti a $\mathcal{B}_0$ danno una base di $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B}' = ((1000), (0001))$$

$$\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}' = (\overset{\alpha}{(1010)}, \overset{\beta}{(1100)}, \overset{\gamma}{(1000)}, \overset{\delta}{(0001)}) \quad \text{BASE}$$

$$(\alpha+\beta+\gamma, \beta, \alpha, \delta) = (0000) \iff \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 0 \quad \delta = 0$$

**N.B** $((1\,0\,0\,0),(0\,1\,0\,0)) = \mathcal{B}''$

NON VANNO BENE COME SEQ DA AGGIUNGERE A $\mathcal{B}$.

**DIM:** Sia $\mathcal{B}_0 = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k)$

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_k' \dots \bar{e}_n')$

Se $k = n \Rightarrow \mathcal{B}_0$ è base $\Rightarrow$ FINE.

Se $k < n \Rightarrow \mathcal{B}$ è seq. di generatori per $V_n(\mathbb{K})$

$\Rightarrow \bar{e}_1 = \alpha_1 \bar{e}_1' + \dots + \alpha_n \bar{e}_n'$ con $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq \underline{0}$

COME PER STEINITZ POSSIAMO OTTENERE UNA NUOVA BASE SOSTITUENDO IN $\mathcal{B}$ UN OPP. VETTORE CON $\bar{e}_1$

$$\mathcal{B}_1 = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_1 \dots \bar{e}_k' \dots \bar{e}_n')$$

Ragionando come nel lemma di Steinitz noi possiamo arrivare a $\mathcal{B}_K$ ottenuta da $\mathcal{B}$ sostituendo k suoi vettori con vettori di $\mathcal{B}_0$

$\Rightarrow \mathcal{B}_K \setminus \mathcal{B}_0 = \mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}' = \mathcal{B}_K$ è una seq. libera di generatori = BASE di $V_n(\mathbb{K})$ $\square$

$$\mathcal{B}_0 = ((1010), (1100))$$

$$\mathcal{B} = (\underset{\bar{e}_1'}{(1000)}, \underset{\bar{e}_2'}{(0100)}, \underset{\bar{e}_3'}{(0010)}, \underset{\bar{e}_4'}{(0001)})$$

$(1010) = 1\cdot\bar{e}_1' + 1\cdot\bar{e}_3' \longrightarrow$ SOSTITUISCO $e_1'$

$$\mathcal{B}_1 = ((1010), (0100), (0010), (0001))$$

$$(1100) = 1(1010) + 1(0100) - 1(0010)$$

sostituisco uno dei due.

$$\mathcal{B}_2 = ((1010), (0100), (1100), (0001))$$

Ho ~~sostituito~~ portato in $\mathcal{B}$. tutti i vettori di $\mathcal{B}_0$

ed ho una base. $\Rightarrow$ in particolare

i vettori da aggiungere a $\mathcal{B}_0$ per

avere una base sono quelli che non ho

sostituito $\mathcal{B}' = ((0100), (0001))$

$$\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}' = \mathcal{B}_2 \text{ base}$$

$\square$

**N.B** non è detto che ci sia un unico modo per completare a base!

$$\mathcal{B}_2' = (\underbrace{(1010),(1100)}_{\text{vettori di } \mathcal{B}_0}, \underbrace{(0010),(0001)}_{\text{vettori da aggiungere}})$$

$$\mathcal{B}'' = ((0010),(0001)).$$

Siano $\mathcal{U}, W$ due sottospazi vettoriali di $V(\mathbb{K})$.

Allora $\mathcal{U} \cap W \leq V(\mathbb{K})$ è anche esso sottospazio.

$\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{U} \cap W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{U} \Rightarrow \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in \mathcal{U}$

$\quad\quad \bar{x}, \bar{y} \in W \Rightarrow \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in W \quad \Rightarrow \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in \mathcal{U} \cap W$

$0$

$W$

$\boxed{0_u}$

Siano $\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$. Allora $\mathcal{U} \cup W \leq V(\mathbb{K})$

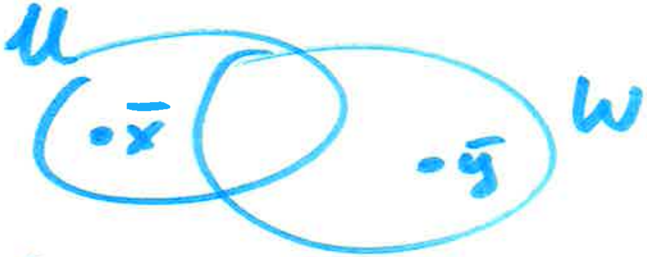
$\Leftrightarrow \mathcal{U} \leq W$ oppure $W \leq \mathcal{U}$

cioè $\mathcal{U} \cup W \leq V(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \mathcal{U} \cup W = \mathcal{U}$ oppure $\mathcal{U} \cup W = W$

<u>DIM</u>: Supponiamo $\exists \bar{x}, \bar{y}$ con $\bar{x} \in \mathcal{U} \setminus W$, $\bar{y} \in W \setminus \mathcal{U}$ $\Rightarrow$

consideriamo

$\bar{x}+\bar{y}$



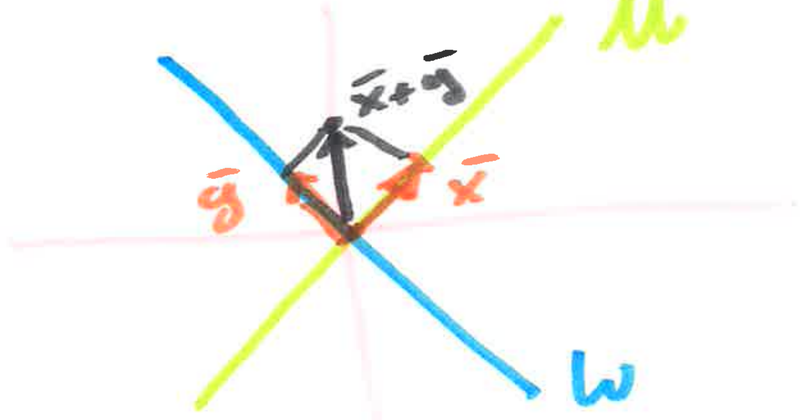

se $\mathcal{U} \cup W$ sottospazio $\Rightarrow \bar{x}+\bar{y} \in \mathcal{U} \cup W$

ma questo implica $\bar{x}+\bar{y} \in \mathcal{U} \Rightarrow \bar{x}+\bar{y} \underbrace{-\bar{x}}_{\in \mathcal{U}} = \bar{y} \in \mathcal{U}$ $\lightning$

oppure

$\bar{x}+\bar{y} \in W \Rightarrow \bar{x}+\bar{y} \underbrace{-\bar{y}}_{\in W} = \bar{x} \in W$ $\lightning$

NE SEGUE $\bar{x}+\bar{y} \notin \mathcal{U}+W$ $\square$



<u>Def</u>: Siano $\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$.

Definiamo $\mathcal{U} + W := \{ \bar{u} + \bar{w} \mid \bar{u} \in \mathcal{U}, \bar{w} \in W \}$.

**Teorema:** $\mathcal{U} + W = \mathcal{L}(\mathcal{U} \cup W)$

$\mathcal{U} + W$ è il più piccolo sottospazio di $V(\mathbb{K})$ che contiene sia $\mathcal{U}$ che $W$.

È detto <u>SOMMA</u> di $\mathcal{U}$ e $W$