Tutoraggio

Lunedì ore 9.00 - 11.00 aula N7

Stefano della Fiore.

Def: Combinazione lineare di $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n \in V(\mathbb{K})$

con $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$

$$\alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + \dots + \alpha_n\bar{v}_n \in V(\mathbb{K})$$

Sottospazio vettoriale $X \subseteq V(\mathbb{K}) \quad X \neq \emptyset$

chiuso rispetto le combinazioni lineari.

$$\forall \bar{a}, \bar{b} \in X \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \in X$$

Applicazione lineare: $f : V(\mathbb{K}) \to W(\mathbb{K})$

che manda combinazioni lineari

di vettori in combinazioni lineari

con i medesimi coeff.

$\forall \bar{a}, \bar{b} \in V \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$f(\alpha \bar{a} + \beta \bar{b}) = \alpha f(\bar{a}) + \beta f(\bar{b})$$

Teorema: Sia $f : V(\mathbb{K}) \to W(\mathbb{K})$ una applicazione lineare.

Allora gli insiemi

$$\mathrm{Im}(f) = f(V)$$

e

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \underline{0} \}$$ Ker

sono sottospazi vettoriali rispettivamente di W e di V.

Ker = Kernel (Nucleo)

DIM: 1) $Im(f) \leq W$

Infatti siano $\bar{x}, \bar{y} \in Im(f)$ ed $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

poiché $\bar{x} \in Im(f)\ \exists\, \bar{v} \in V : f(\bar{v}) = \bar{x}$

$\bar{y} \in Im(f)\ \exists\, \bar{w} \in V : f(\bar{w}) = \bar{y}$

$$\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} = \alpha f(\bar{v}) + \beta f(\bar{w}) =$$
$$= f(\alpha \bar{v}) + f(\beta \bar{w}) =$$
$$= f(\underbrace{\alpha \bar{v} + \beta \bar{w}}_{\in V}) \in Im(f)$$

$\square$

2) $Ker(f) \leq V$

$\forall \bar{v}, \bar{w} \in \operatorname{Ker} f \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow f(\alpha \bar{v} + \beta \bar{w}) = \alpha f(\bar{v}) + \beta f(\bar{w}) =$$

$$= \alpha \underline{0} + \beta \underline{0} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in \operatorname{Ker} f.$$

$\square$

<u>Teorema</u>: La funzione lineare $f: V \to W$ è iniettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$.

Inoltre in generale se $\bar{x} \in \operatorname{Im}(f)$ l'insieme di tutte le preimmagini di $\bar{x}$ è del tipo $\bar{v} + \operatorname{Ker} f := \{\bar{v} + \bar{w} \mid \bar{w} \in \operatorname{Ker} f\}$ e $f(\bar{v}) = \bar{x}$

__Dim__: Se $\operatorname{Ker} f \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow \exists$ almeno 2 vettori in V tali che $f(\bar{v}) = f(\bar{w}) = \underline{0} \Rightarrow f$ NON INIETTIVA.

Viceversa. Supponiamo $f(\bar{v}) = f(\bar{w}) \Rightarrow$

$$f(\bar{v}) - f(\bar{w}) = \underline{0} \Rightarrow f(\bar{v} - \bar{w}) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \bar{v} - \bar{w} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \exists \bar{k} \in \operatorname{Ker} f :$$

$$\bar{v} = \bar{w} + \bar{k}.$$

Se $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\} \Rightarrow \bar{k} = \underline{0} \Rightarrow \bar{v} = \bar{w}$ $\square$

$$f(\bar{v})+f(\bar{k}) = f(\bar{v}) + \underline{0} \quad \text{se} \quad \bar{k} \in \operatorname{Ker} f \qquad (*)$$

quindi ~~se la funzione è iniettiva $\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$.~~

~~e se la funzione non è iniettiva $\Rightarrow \operatorname{Ker} f \neq \{\underline{0}\}$.~~

$\rightarrow$ f iniettiva $\iff \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$.

Da $(*)$ segue anche che quando f non è iniettiva l'insieme delle preimmagini di un vettore $\bar{y}$ è del tipo desiderato $\square$

Esempio
$$f : \begin{cases} V\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \longrightarrow (x+y,\ 2x+2y,\ z) \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; \begin{matrix} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \\ z=0 \end{matrix} \right\} = \{ (x,-x,0) \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

$f(1,-1,0) = (0\ 0\ 0)$

$f(0\ 0\ 0) = (0\ 0\ 0)$

preimmagine di $(2\ 4\ 6)$?

$\bar{v} = (1,1,6) \qquad f(\bar{v}) = (2,4,6)$ ok.

$\bar{v} + \ker f = \{(1+x, 1-x, 6) \mid x \in \mathbb{R}\}.$

$f(2,0,6) = (2,4,6)$

$f(0,2,6) = (2,4,6)$

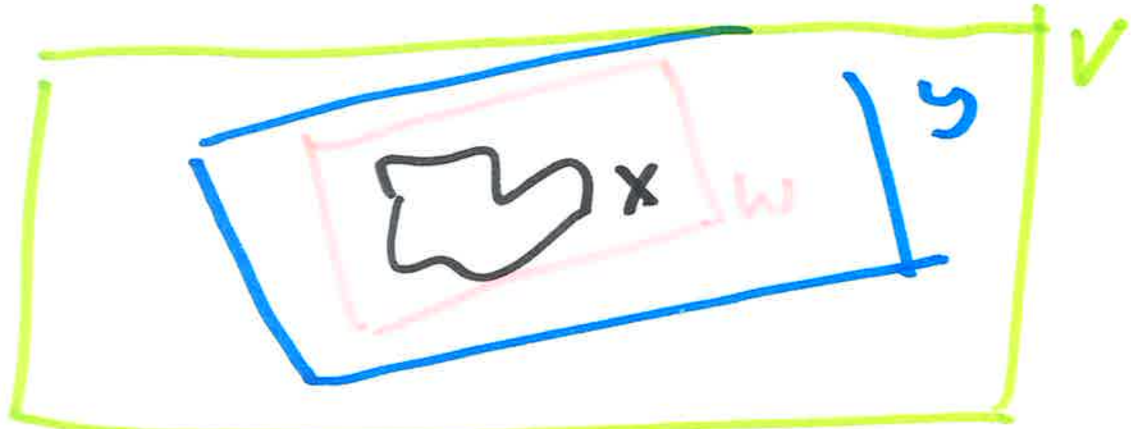
etc. etc.

$|\ker f| = \infty$

Dato $X \subseteq V(\mathbb{K})$ diciamo sottospazio vettoriale generato da X il più piccolo sottospazio $W \leq V(\mathbb{K})$ tale che $X \subseteq W$.

più piccolo formalmente significa che

$$\boxed{\forall\, Y \leq V(\mathbb{K}) : X \subseteq Y \Rightarrow W \subseteq Y}$$



Si dice anche che X é un insieme/sequenza di generatori per W.

Sia $X \subseteq V(\mathbb{K})$ si dice <u>copertura lineare</u> di X (indicata con $\mathcal{L}(X)$ oppure $<X>$ $\langle X \rangle$) l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di un numero finito di elementi di X

$$\mathcal{L}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{K}, \bar{x}_i \in X \right\}.$$

se $X = \phi$ poniamo $\mathcal{L}(X) = \{\underline{0}\}$.

__DIM__: Se W sottospazio di V che contiene X

$\Rightarrow$ $\forall$ comb. lineare finita di vettori di W (e quindi anche di X) è contenuta in W $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(X) \subseteq W$

Resta da dimostrare $\mathcal{L}(X)$ sottospazio vett.

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i \quad , \quad \bar{w} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \bar{y}_i$$

con $\bar{x}_i, \bar{y}_i \in X$ ed osserviamo che

$$\lambda \bar{v} + \mu \bar{w} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i + \mu \sum_{i=1}^{m} \beta_i \bar{y}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m+n} \gamma_i \bar{z}_i \qquad \text{con}$$

OSS: $\mathcal{L}(X)$ è il sottospazio vettoriale generato da X
cioè è il più piccolo sottospazio di $V(\mathbb{K})$ che contiene X.

$\mathcal{L}(\emptyset)$ in $\mathbb{R}^3$ $= \{(0,0,0)\}$.

$\mathcal{L}(\emptyset)$ in $\mathbb{R}^{2,2}$ $= \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

N.B $\mathcal{L}(X)$ in realtà sarebbe $\mathcal{L}_V(X)$
(dipende dallo spazio V di cui X è sottoinsieme)
ma di solito (sempre) non c'è bisogno di specificare V.

$\gamma_1 = \lambda \alpha_1 \quad \dots \quad \gamma_n = \lambda \alpha_n$

$\gamma_{n+1} = \mu \beta_1 \quad \dots \quad \gamma_{m+n} = \mu \beta_m$

$\bar{z}_1 = \bar{x}_1 \quad \dots \quad \bar{z}_n = \bar{x}_n$

$\bar{z}_{n+1} = \bar{y}_1 \quad \dots \quad z_{n+m} = \bar{y}_m$

Combinazione lineare di un numero finito di elementi di X.

$\bar{z}_i \in X$

$\gamma_i \in \mathbb{K}$.

Se ammettessimo un numero infinito di vettori avremmo comportamenti patologici. prendiamo ad esempio una serie razionale che converge a $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Def: Uno spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$ è detto finitamente generato se $\exists\ X \subseteq V(\mathbb{K})$ con $|X| = n < \infty$ e $V = \mathcal{L}(X)$.

Quasi tutti gli sp. vettoriali che vedremo sono f. generati:

Esempio $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}((1\,0\,0),(0\,1\,0),(0\,0\,1)) =$

$= \mathcal{L}((1\,1\,0),(1\,0\,0),(0\,1\,1),(0\,0\,1))$

$$\mathbb{R}^{2,3} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$\mathbb{R}[x] = \{ f(x) \mid f(x) \text{ polinomio} \}$.

Supponiamo $\exists$ un insieme finito di generatori X

prendiamo $t = \max\{\deg f(x) \mid f \in X\}$.

il polinomio $x^{t+1} = g(x)$ appartiene ad $\mathbb{R}[x]$

ma non può essere c. lineare di polinomi di grado $\leq t$ $\Rightarrow$ NON è f. generato.

$A = \mathbb{R}^{1,3} = \{ (a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R} \}$

$B = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \{ (a,(b,c)) \mid a,b,c \in \mathbb{R} \}$. $\quad \mathbb{R}^3$??

$C = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} = \{ ((a,b),c) \mid a,b,c \in \mathbb{R} \}$

NON SI IDENTIFICA CON

$\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{1,n} \qquad \mathbb{R}^{3,1} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$.

esiste sempre una applicazione lineare biiettiva fra $A \to B \quad A \to C$

$B \to C$

come s. vettoriali sono isomorfi.

$X = \{(1\,2\,0), (0\,2\,1), (0\,0\,1), (1\,2\,3)\}$. ← in ∞ modi come c. lineare.

$\mathcal{L}(X) = \mathbb{R}^3$

$\alpha(1\,2\,0) + \beta(0\,2\,1) + \gamma(0\,0\,1) + \delta(1\,2\,3)$

$Y = \{(1\,2\,0), (0\,2\,1), (0\,0\,1)\}$ ← in modo unico come c. lineare

$a(1\,2\,0) + b(0\,2\,1) + c(0\,0\,1)$

$(x, y, z) = (\alpha + \delta, 2\alpha + 2\beta + 2\delta, \beta + \gamma + 3\delta)$

$(x, y, z) = (a, 2a + 2b, b + c)$.

$$\begin{cases} a = x \\ 2a + 2b = y \\ b + c = z \end{cases} \qquad \begin{cases} a = x \\ b = \dfrac{y-2x}{2} \\ c = z - b = z - \dfrac{y-2x}{2} \end{cases}$$

$\exists!$ soluzione.

$$\begin{cases} \alpha + \delta = x \\ 2\alpha + 2\beta + 2\delta = y \\ \beta + \gamma + 3\delta = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = x - \delta \\ \beta = (y - 2\alpha - 2\delta)\frac{1}{2} = \dfrac{(y - 2x + 2\delta - 2\delta)}{2} \\ \gamma = z - \beta - 3\delta = z - \dfrac{y-2x}{2} - 3\delta \\ \delta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ci sono ∞ soluzioni.

Se conosciamo $\ker f = \{\bar{v} \mid f(\bar{v}) = \underline{0}\} \Rightarrow$ conosciamo le possibili preimmagini di ogni elemento $\bar{x} \in \operatorname{Im} f$.

Def: Una sequenza (sistema/insieme) di vettori

$\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n \in V(\mathbb{K})$

è detta libera / linearmente indipendente se l'unica loro combinazione lineare che dà $\underline{0}$ è quella con i coefficienti tutti nulli.

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Una sequenza è detta legata se non è libera (legata o linearmente dipendente)

$\exists (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \neq \underline{0} : \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0}$

esiste una c. lineare a coeff non tutti nulli che dà $\underline{0}$

OSS: Sia X una sequenza di vettori (ordinata) libera. Supponiamo $|X| = n$. Allora $\forall \bar{v} \in \mathcal{L}(X)$ $\exists! (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n = \bar{v}$$

$$X = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$$

DIM Almeno una c. lineare $\exists$ perché $\bar{v} \in \mathcal{L}(X)$.

SUPPONIAMO $\alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n = \bar{v} = \beta_1 \bar{x}_1 + \dots + \beta_n \bar{x}_n$

con $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (\beta_1 \dots \beta_n)$

$\Rightarrow (\alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n) - (\beta_1 \bar{x}_1 + \dots + \beta_n \bar{x}_n) = \bar{v} - \bar{v} = \underline{0}$

$\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1)\bar{x}_1 + \dots (\alpha_n - \beta_n)\bar{x}_n = \underline{0}$

con $(\alpha_1-\beta_1 \dots \alpha_n-\beta_n) \neq (0\,0 \dots 0)$

ASSURDO ↯

perché la sequenza è libera $\square$

Rispetto una sequenza libera X $\forall$ vettore di $\mathcal{L}(X)$ si scrive in modo unico.

Def Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale. Si dice base di $V(\mathbb{K})$ una sua sequenza libera di generatori.

CONSEGUENZA $\mathcal{B}$ é una base di $V(\mathbb{K})$ se e solamente se ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare degli elementi di ~~[illegible]~~ $\mathcal{B}$.

<u>DIM</u>: 1) Ogni vettore si può scrivere come c. lineare $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ di generatori.

2) Ogni vettore generato si scrive in modo unico $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ libera

$\longrightarrow \mathcal{B}$ base

<u>N.B</u> La nostra def di Base è chiamata su alcuni libri <u>BASE ORDINATA</u>

(mentre per base chiedono insieme libero di generatori).

proprietá delle sequenze legate. $S = \{\bar{s}_1 \ldots \bar{s}_n)$

1) Se $\underline{0} \in S \Rightarrow S$ é legata.

$$\underline{0} = 0 \cdot \bar{s}_1 + \ldots + 1 \cdot \underline{0} + \ldots + 0 \cdot \bar{s}_n =$$
$$= 0 \cdot \bar{s}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{0} + \ldots + 0 \cdot \bar{s}_n$$

2) Se $\exists\, \bar{s}_i \in S$ tale che $-\bar{s}_i \in S \Rightarrow S$ é legata.

$$0 \cdot \bar{s}_1 + \ldots + 1 \cdot \bar{s}_i + \ldots 1 \cdot (-\bar{s}_i) + \ldots 0 \cdot \bar{s}_n = \underline{0}$$

3) Se $\exists\, \bar{s}_i \in S$ tale che c'è un vettore $\alpha \bar{s}_i \in S \Rightarrow$
$\Rightarrow S$ é legata.

$$0 \cdot \bar{s}_1 + \ldots + (-\alpha)\bar{s}_i + \ldots + \alpha \bar{s}_i + \ldots + 0 \bar{s}_n = \underline{0}$$

4) Se $\exists\, \bar{s}_i \in S$ tale che $\bar{s}_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{s}_j$

è combinazione lineare dei rimanenti

$\Rightarrow S$ è legata.

$$-\alpha_1 \bar{s}_1 - \alpha_2 \bar{s}_2 \dots + \bar{s}_i - \alpha_{i+1} \bar{s}_{i+1} \dots - \alpha_n \bar{s}_n =$$

$$= \underline{0}$$

<u>Teorema</u>: Una sequenza S è legata se e solamente se $\exists$ un vettore $\bar{s}_i \in S$ che è combinazione lineare dei rimanenti.

<u>DIM</u>: $\bar{s}_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{s}_j \Rightarrow$

$$\underbrace{-\sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{s}_j + \bar{s}_i}_{\text{c. lineare a coeff. non tutti nulli.}} = \underline{0}$$

Supponiamo S legata $\Rightarrow$

$\exists(\alpha_1 \ldots \alpha_n) \neq (0\,0 \ldots 0)$:

$$\alpha_1 \bar{s}_1 + \ldots + \alpha_n \bar{s}_n = \underline{0}$$

Supponiamo $\alpha_i \neq 0$

$$\alpha_i \bar{s}_i = - \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{s}_j$$

ma $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow \exists\, \alpha_i^{-1} \in \mathbb{K} \Rightarrow$

$$\bar{s}_i = \alpha_i^{-1}(\alpha_i \bar{s}_i) = \alpha_i^{-1}\Big(-\sum_{j\neq i} \alpha_j \bar{s}_j\Big) =$$

$$= \sum_{j\neq i} (-\alpha_i^{-1}\alpha_j)\, \bar{s}_j$$

$\bar{s}_i$ é comb. lineare degli altri vettori. $\square$