$\mathbb{K}$ $\qquad (\mathbb{K}, +, \cdot)$ campo $\qquad V(\mathbb{K})$

$(V, +)$ gruppo commutativo

$\cdot \quad \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$

$1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$

$(\alpha\beta) \cdot \bar{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{v})$

prodotto nel campo

prodotto scalare per vettore

\+ nel campo

$(\alpha + \beta) \cdot \bar{v} = \alpha \bar{v} + \beta \bar{v}$

somma di vettori

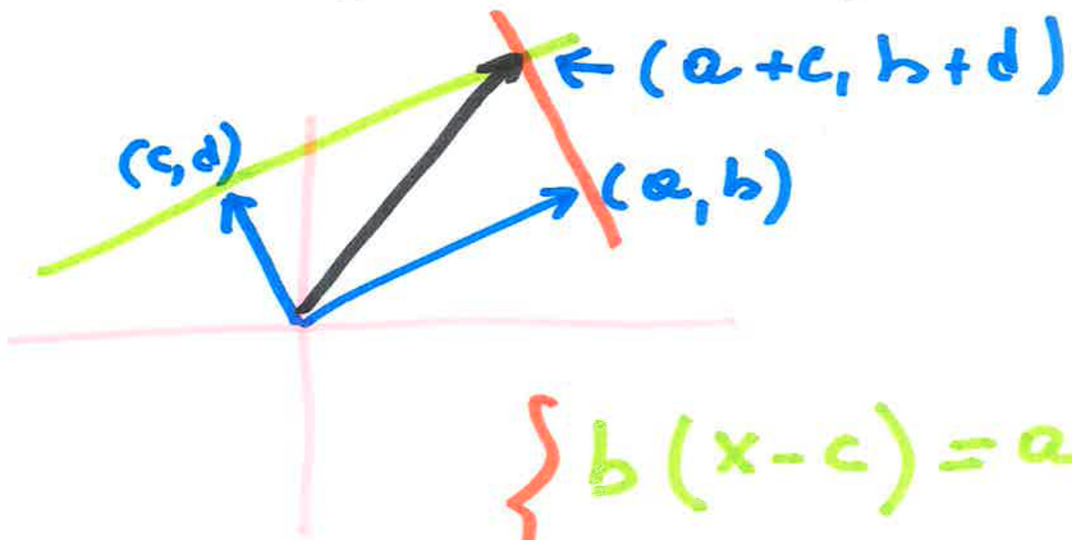
$\alpha \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \alpha \bar{v} + \alpha \cdot \bar{w}$

somma di vettori

El. neutro di $(V,+)$ con $V(\mathbb{K})$ spazio vettoriale $\Rightarrow \underline{0}$

DI SOLITO SCRIVERÒ i VETTORI $\bar{v}$

se $\bar{v} \in \mathbb{K}^n$ $\quad \bar{v} = (v_1\ v_2 \dots v_n)$



$$\begin{cases} b(x-c) = a(y-d) \\ d(x-a) = c(y-b) \end{cases}$$

Teorema Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

ALLORA

1) $\alpha \cdot \bar{v} = \underline{0} \iff \bar{v} = \underline{0}$ oppure $\alpha = 0$

2) $(-1) \cdot \bar{v} = (-\bar{v})$

DIM: 1) innanzi tutto osserviamo che

$0 \cdot \bar{v} = \underline{0}$ e $\alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$ $\forall \bar{v} \in V$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

$$0 \cdot \bar{v} = (0+0) \cdot \bar{v} = 0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v}$$

da cui sommando a dx e sx $(-0 \cdot \bar{v})$

si ottiene $\underline{0} = 0 \cdot \bar{v}$

similmente $\alpha \cdot \underline{0} = \alpha \cdot (\underline{0} + \underline{0}) = \alpha \cdot \underline{0} + \alpha \cdot \underline{0}$

e sommando a dx e sx $-\alpha \cdot \underline{0} \Rightarrow \underline{0} = \alpha \cdot \underline{0}$

Supponiamo ~~[illegible]~~

$$\alpha \cdot \bar{v} = \underline{0}$$

se $\alpha = 0 \Rightarrow$ <u>fine</u>

se $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists\, \alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ tale che $\alpha^{-1}\alpha = 1$

$$\Rightarrow \quad \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \bar{v}) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

$$\parallel$$

$$(\alpha^{-1}\alpha) \cdot \bar{v} = 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$$

2) $((-1) \cdot \bar{v}) + \bar{v} = (-1) \cdot \bar{v} + 1 \cdot \bar{v} = (-1+1) \cdot \bar{v} =$

$$= 0 \cdot \bar{v} = \underline{0}$$

quindi sommando a dx e sx $-\bar{v}$ otteniamo

$$(-1) \cdot \bar{v} + \bar{v} + (-\bar{v}) = -\bar{v}$$

$$\parallel$$

$$(-1) \cdot \bar{v}$$

$\square$

$\mathbb{K}^n$ é spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

$^n\{(a_1 \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_i \in \mathbb{K}\ \forall i\}.$

$$(a_1 \dots a_n) + (b_1 \dots b_n) := (a_1 + b_1 \dots a_n + b_n)$$

$$\alpha(a_1 \dots a_n) := (\alpha a_1 \dots \alpha a_n)$$

$$\mathbb{K}^{m,n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}.$$

MATRICI CON
m RIGHE
n COLONNE.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = ((a_{ij}))_{i=1 \dots m}^{j=1 \dots n}$$

$$((a_{ij})) + ((b_{ij})) := ((a_{ij} + b_{ij}))$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & & \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\alpha \cdot ((a_{ij})) := ((\alpha \cdot a_{ij}))$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

chiamiamo gli elementi di $\mathbb{K}^{1,n}$ vettori riga (e li identifichiamo con quelli di $\mathbb{K}^n$) e gli elementi di $\mathbb{K}^{m,1}$ vettori colonna.

Come spazi vettoriali fra $\mathbb{K}^{2,2}$ e $\mathbb{K}^4$ c'è poca differenza.

$$\mathbb{K}^{2,2} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{K} \right\}.$$

$$\mathbb{K}^4 := \left\{ (a\ b\ c\ d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{K} \right\}.$$

Se poniamo $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{K}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow (a\ b\ c\ d) \end{cases}$

ALLORA

1) φ è biiettiva e dunque invertibile

2) a) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall M \in \mathbb{K}^{2,2}$ $\varphi(\alpha M) = \alpha\, \varphi(M)$

b) $\forall M, N \in \mathbb{K}^{2,2}$: $\varphi(M+N) = \varphi(M) + \varphi(N)$

2 a) $\varphi\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}\right) = (\alpha a \;\; \alpha b \;\; \alpha c \;\; \alpha d)$

$= \alpha \cdot (a \;\; b \;\; c \;\; d) = \alpha\, \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

2 b) $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}\right) =$

$= (a+a' \;\; b+b' \;\; c+c' \;\; d+d') =$

$= (a \;\; b \;\; c \;\; d) + (a' \; b' \; c' \; d') = \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right)$ ▪

<u>Def</u>: Sia $\mathbb{K}$ un campo e siano $V(\mathbb{K})$ e $W(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.
Una funzione $\varphi : V(\mathbb{K}) \to W(\mathbb{K})$ è detta trasformazione lineare (funzione lineare)

se 1) $\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall \bar{v} \in V: \ \varphi(\alpha \bar{v}) = \alpha \bar{v}$

2) $\forall \bar{v}, \bar{w} \in V: \ \varphi(\bar{v} + \bar{w}) = \varphi(\bar{v}) + \varphi(\bar{w})$.

Le trasformazioni lineari sono le trasformazioni che "preservano la struttura di spazio vettoriale".

In particolare l'immagine di uno spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$ mediante una trasformazione lineare è ancora uno spazio vettoriale. (sottospazio di $W(\mathbb{K})$).

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno s.vett.
Un sottoinsieme $X \subseteq V(\mathbb{K})$ é detto
<u>sottospazio vettoriale</u> (su $\mathbb{K}$) se
X dotato delle restrizioni <u>troncate</u>
della somma di V ristretta ad $X \times X$ e troncata ad X e del prodotto per scalare di V ristretto a $\mathbb{K} \times X$ e troncato ad X é uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

$X \subseteq V$ ci limitiamo a trattare elementi di X invece che a prendere elementi in V (ma facciamo le stesse operazioni) vogliamo che le operazioni non ci portino fuori da X $\rightarrow$ devono essere operazioni interne! $\rightarrow$ vanno troncate ad X.

V sp. vett.

$$+ \quad V \times V \rightarrow V$$
$$\cdot \quad \mathbb{K} \times V \rightarrow V$$

$X \subseteq V$

$$+\big|_{X \times X} : X \times X \rightarrow V \qquad +\big|_{X \times X}^{X} : \underline{X} \times \underline{X} \rightarrow \underline{X}$$

$$\cdot\big|_{\mathbb{K} \times X} : \mathbb{K} \times X \rightarrow V \qquad \cdot\big|_{\mathbb{K} \times X}^{X} : \mathbb{K} \times \underline{X} \rightarrow \underline{X}$$

<u>Def</u>: Siano $\bar{v}, \bar{w} \in V(\mathbb{K})$ due vettori, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ si dice <u>combinazione lineare</u> di $\bar{v}$ e $\bar{w}$ con i

coeff. α e β il vettore

$$\alpha\bar{v}+\beta\bar{w} \in V(\mathbb{K}).$$

<u>Teorema</u>: $X \leqslant V(\mathbb{K})$ (ove leggiamo $\leqslant$ come "sottospazio") se e solamente se X è chiuso rispetto le combinazioni lineari. cioè

$X \neq \emptyset$

$$\boxed{\forall \bar{v},\bar{w} \in X,\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}:\ \alpha\bar{v}+\beta\bar{w} \in X.}$$

<u>DIM</u>: Se X non è chiuso rispetto le operazioni ristrette ad X $\Rightarrow$ NON PUÒ ESSERE s. vettoriale. (perché non possiamo fare il troncamento).

Es: $\bar{v} \in X$, $\bar{w} \in X$; $\bar{v}+\bar{w} \notin X$ $\Rightarrow$ sicuramente $(X,+)$ non è un gruppo.

Viceversa: Supponiamo $\forall \bar{v}, \bar{w} \in X \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$\alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in X$$

mostriamo che valgono le prop. di spazio vett.

<u>OSS</u>: le proprietà associativa e commutativa della somma valgono $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V \Rightarrow$ valgono a maggior ragione $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in X$

dobbiamo far vedere che $\underline{0} \in X$ e $\forall \bar{u} \in X \Rightarrow -\bar{u} \in X$

per avere $(X, +|_{..})$ gruppo abeliano.

→ per ipotesi $0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v} = \underline{0} + \underline{0} \in X$ perché preso $\bar{v} \in X$ $\quad 0 \cdot \bar{v} \in X$

→ $\forall \bar{v} \in X \Rightarrow (-1) \cdot \bar{v} = -\bar{v} \in X$ ✓

stessa osservazione relativamente il prod. per scalare.

che $1 \cdot \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in V \Rightarrow 1 \cdot \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in X$

$\alpha \cdot (\beta \cdot \bar{v}) = (\alpha\beta) \cdot \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in V \Rightarrow$ vale $\forall \bar{v} \in X$

$(\alpha+\beta)\bar{v} = \alpha\bar{v} + \beta\bar{v}$

$\alpha(\bar{v}+\bar{w}) = \alpha\bar{v} + \alpha\bar{w}$

Bisogna mostrare che $\alpha\bar{v} \in X$ se $\bar{v} \in X$.

Segue dalla proprietà $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \forall \bar{v}, \bar{w} \in X$

$\alpha\bar{v} + \beta\bar{w} \in X$

prendendo $\beta = 0$ o $\bar{w} = \underline{0}$

□

$V = \mathbb{k}^2$ $\qquad \mathbb{k}^2 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{k}\}.$

$X = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{k}\}.$

$X \times X = \{((a,0),(a',0)) \mid (a,0),(a',0) \in X\}.$

Εξ. $(\mathbb{K}^n, +)$ ua $\mathbb{K}$

$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

$X \subseteq \mathbb{R}^2$ $X = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

$X \leq \mathbb{R}^2$

$\forall (a,0), (b,0) \in X \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha(a,0) + \beta(b,0) \in X$

$\|$

$(\alpha a + \beta b, 0)$ ✓ $\alpha a + \beta b \in \mathbb{R}$

$\{\underline{0}\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad Y := \{(0,0)\}.$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot (0,0) = (0,0) \in Y$

$\forall (0,0), (0,0) \in Y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha(0\ 0) + \beta(0\ 0) = (0\ 0) \in Y.$

N.B $\emptyset$ NON È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE.

$\left.\begin{array}{l} \{\underline{0}\} \leq V(\mathbb{K}) \\ V \leq V(\mathbb{K}) \end{array}\right\}$ SOTTOSPAZI BANALI

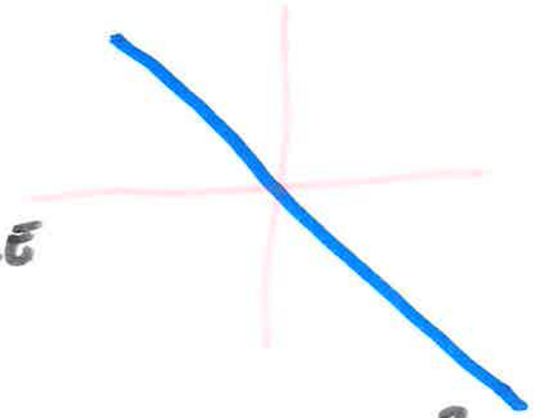
$X' := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a+b) = 0\}.$

$$\alpha(a,b) + \beta(c,d) = (\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d)$$

$$a+b = c+d = 0$$

$$(\alpha a + \beta c) + (\alpha b + \beta d) =$$
$$= \alpha(a+b) + \beta(c+d) = 0 + 0.$$

$$X' \leq \mathbb{R}^2$$



OGNI SOTTOSPAZIO VETTORIALE DEVE CONTENERE $\underline{0}$

In particolare $X'' = \{(a,b) \mid a+b=1\} \not\leq \mathbb{R}^2$

NON È SOTTOSPAZIO VETTORIALE

$$(0,0) \notin X''$$

Se $\underline{0} \notin X \Rightarrow X$ NON È SOTTOSPAZIO.

$X'''' := \{(a,b) \mid a^2+b^2=0\}$. ~~su~~ $\mathbb{R} \Rightarrow$

$(0,b)$ $\qquad X''' = \{(0,0)\} \leq \mathbb{R}^2$

$X''''' := \{(a,b) \mid a^2+b^2=0,\ a,b \in \mathbb{C}\} \leq \mathbb{C}^2$?

$$\| $$

$\{(a,b) \mid (a+ib)(a-ib)=0\} =$

$= \{(a,b) \mid a+ib=0\} \cup \{(a,b) \mid a-ib=0\}$.

prendiamo ad esempio $(1,i)$ e l'elemento
$(1,-i)$

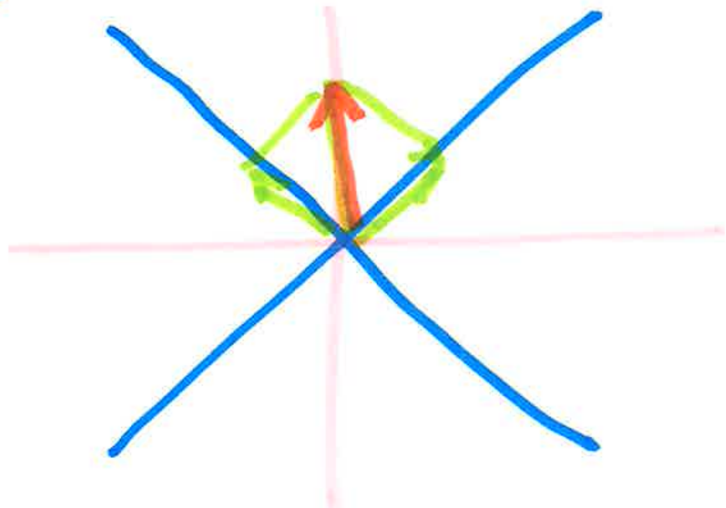
osserviamo che

$$(1,i)+(1,-i)=(2,0)$$

MA $(2,0) \notin X^{\mathrm{III}}$ in quanto $2^2+0^2=4\neq 0$

$$X^{\mathrm{V}} := \{(a,b) \mid a^2-b^2=0\} = \{(a,b) \mid a+b=0\} \cup \{(a,b) \mid a-b=0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

X^{V}



$(0,0) \in X^{\mathrm{V}}$

$(1,1) \in X^{\mathrm{V}}$

$(1,-1) \in X^{\mathrm{V}}$

$(2,0) \notin X^{\mathrm{V}}$

In generale se un insieme di vettori X è descritto da un sistema di equazioni lineari omogeneo (cioè con termini costanti tutti uguali a 0) ⇒ esso è un sottospazio vettoriale.

Se è descritto da un sistema di equazioni NON OMOGENEO ⇒ in generale $\underline{0} \notin X \Rightarrow X$ non è sottospazio vettoriale.

Se X è descritto da un sistema di equazioni non lineari (non di I grado) omogeneo.

di solito <u>No</u> ma potrebbe essere anche sì

$$X = \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a+b)^2 = 0 \}. =$$

$$= \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a+b = 0 \}.$$

per quali valori di k l'insieme

$$Y_k = \{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a^2 + kba + b^2) = 0 \quad a+b+c = 0 \}.$$

é uno sottospazio vettoriale?

$$(a^2 \pm 2ba + b^2) = (a \pm b)^2$$

$K = 2$ oppure $K = -2$

$\cancel{X \leq \{(a,b) \ldots}$

$$X = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} a^2 + k\,ab + b^2 = 0 \\ a + b + c = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$\Delta < 0 \Rightarrow X = \phi$ NON È SOTTOSPAZIO

$$\Delta = 0 \Rightarrow X = \left\{ (a,b,c) \;\middle|\; \begin{matrix} (a+b)^2 = 0 \\ a + b + c = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (a,b,c) \;\middle|\; \begin{matrix} a + b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{matrix} \right\}.$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \left\{ (a,b,c) \;\middle|\; \begin{matrix} (a + \varepsilon_1 b)(a + \varepsilon_2 b) = 0 \\ a + b + c = 0 \end{matrix} \right\}.$$

$$= \{(a,b,c) \mid a+\varepsilon_1 b = 0,\ a+b+c = 0\} \cup$$

$$\{(a,b,c) \mid a+\varepsilon_2 b = 0\ \ a+b+c = 0\}.$$