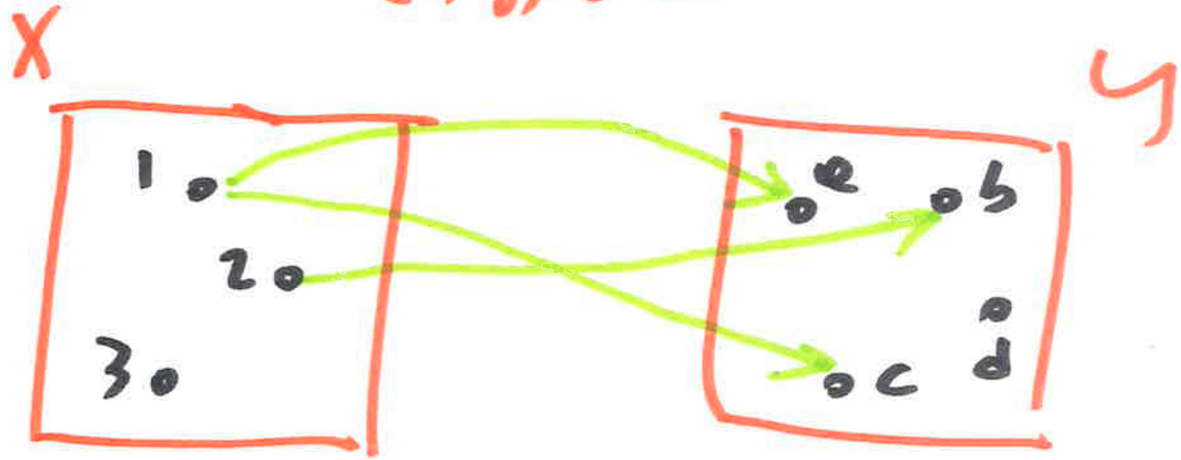
Costruzione del prodotto cartesiano di 2 insiemi.

$$(a,b) = \{\{a,b\}, a\}.$$

$$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

CORRISPONDENZA FRA X e Y insiemi è un sottoinsieme $\mathcal{C} \subseteq X \times Y$.

$$(x,y) \in \mathcal{C}$$



$$\{(1,a), (1,c), (2,b)\}$$

Dato $\mathcal{C} \subseteq X \times Y$ definiamo

$\mathcal{C}^{opp} \subseteq Y \times X$ tale che

$$\mathcal{C}^{opp} = \{(y,x) \mid (x,y) \in \mathcal{C}\}.$$

CORRISPONDENZA <u>OPPOSTA</u>

$\{(a,1),(c,1),(b,2)\}$

- Si dice che $\mathcal{C}$ corrispondenza è <u>ovunque definita</u> se

$\forall x \in X \; \exists y \in Y$ tale che $(x,y) \in \mathcal{C}$

esiste
(almeno uno)

- Si dice che $\mathcal{C}$ é <u>funzionale</u> se

$$\forall x \in X \quad \exists_{\leq 1} \; y \in \mathcal{Y} \text{ con } (x,y) \in \mathcal{C}$$

esiste al più uno

$$\forall x \in X : \exists y \in \mathcal{Y} : (x,y) \in \mathcal{C} \Rightarrow \exists! \, y \in \mathcal{Y} : (x,y) \in \mathcal{C}$$

per ogni $x \in X$

se $\exists y$ con $(x,y) \in \mathcal{C}$

$\rightarrow$ ALLORA $\exists$ un unico $y \in \mathcal{Y}$

con $(x,y) \in \mathcal{C}$.

<u>Def</u>: Si dice <u>funzione</u> $f : X \to \mathcal{Y}$ con dominio X e codominio $\mathcal{Y}$ una

corrispondenza fra X ed Y che è ovunque definita e funzionale.

[f funzione $\Leftrightarrow X \to Y$

$\forall x \in X \ \exists! \, y \in Y : (x,y) \in f$]

$f \subseteq X \times Y$

se $(x,y) \in f$ scriveremo anche

$f(x) = y$

<u>N.B:</u> Siano $f : X \to Y$ e $g : X \to Z$

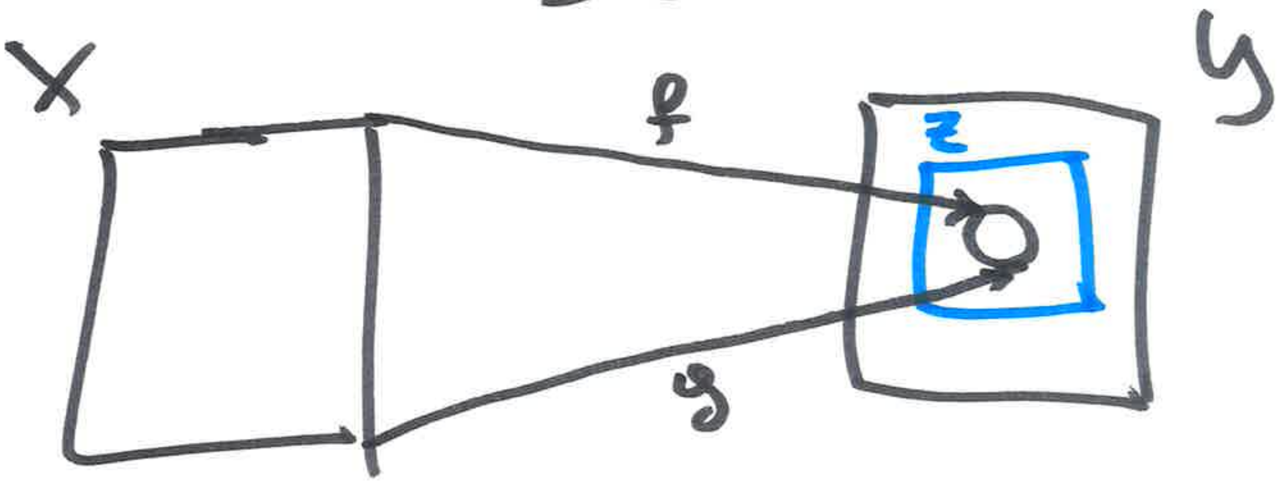
due funzioni con $Z \subseteq Y$ e

~~[illegible]~~

tali che $\quad f(x) = g(x) \quad \forall x \in X$

e $\quad f(X) := \{ y \in \mathcal{Y} \mid \exists x \in X : f(x) = y \}$

$\subseteq Z$



f, g hanno codomini differenti

CONVIENE CONSIDERARLE COME FUNZIONI DIVERSE.

Due funzioni $\quad f \subseteq X \times Y \quad f: X \to Y$

$\quad g \subseteq W \times Z \quad g: W \to Z$

sono uguali se e solamente se

hanno → stesso dominio $X = W$

→ stesso codominio $Z = Y$

→ coincidono come valori

cioè $f(x) = g(x) \ \forall x \in X$

Sia $f: X \to Y$ una funzione

chiamiamo immagine di f l'insieme

$$\mathrm{Im}(f) := f(X) = \{ y \in Y : \exists x \in X \text{ con } f(x) = y \}.$$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^2 \end{cases}$$

$$f(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}. \subseteq \mathbb{R}$$

$$f' : \begin{cases} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ x \longrightarrow x^2 \end{cases}$$ é differente

N.B. $f'(\mathbb{Q}) \neq f(\mathbb{R}) \cap \mathbb{Q}$

$\frac{1}{2} \geq 0 \quad \frac{1}{2} \notin f'(\mathbb{Q}) \quad \frac{1}{2} \in f(\mathbb{R})$

$$f'(\mathbb{Q}) = \left\{ \frac{a^2}{b^2} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

$\mathbb{N}$: insieme dei numeri naturali
escluso 0

$\mathbb{N}_0$: insieme dei numeri naturali
incluso 0

$\mathbb{Z}$: insieme dei numeri interi.

$\mathbb{Q}$: insieme dei numeri razionali $\frac{a}{b}$ $b \neq 0$

$\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali.

$\mathbb{C}$: insieme dei numeri complessi.
$(a + ib)$ $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$$f : X \to Y$$

immagine di f

$$f(X) \subseteq Y.$$

$$Z = f(X)$$

$f' : X \to Z$ è diversa da f

operazione che ci porta da f' ad f.

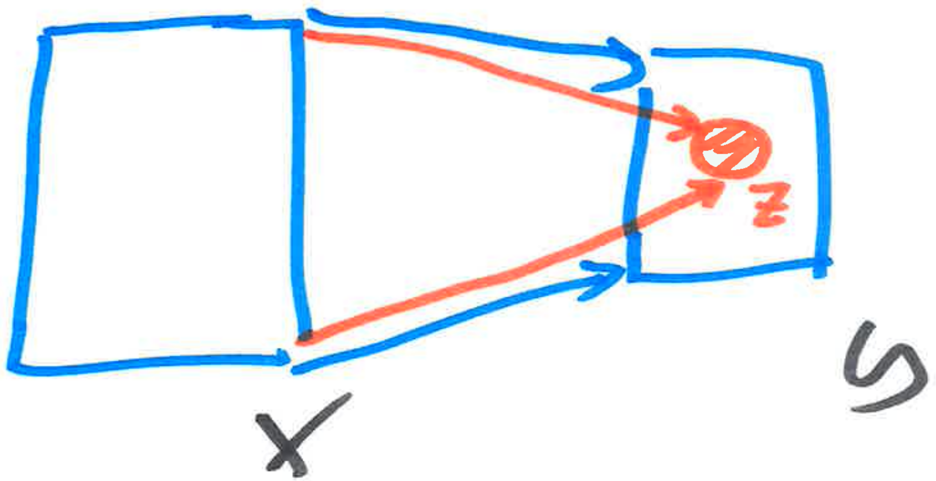
Sia $f : X \to Y$ una funzione

$$f(X) \subseteq Z \subseteq Y.$$

Si dice <u>troncamento</u> di f a Z la funzione

$f^{|Z} : X \to Z$

definita come $f^{|Z} = \{(x,z) \in X \times Z \mid (x,y) \in f\}$.



$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

$+' : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.

Sia $f : X \to Y$ una funzione e $W \subseteq X$.

Si dice restrizione di f a W

$f_W \subseteq W \times Y$ la funzione

$$f_W = \{(w, y) \in W \times Y \mid (w, y) \in f\}.$$

Restringere il dominio non richiede ipotesi aggiuntive.

Ingrandire il codominio non richiede ipotesi aggiuntive.

Troncare il codominio richiede che l'immagine sia contenuta nell'insieme a cui

Si tronca.

Ingrandire il dominio richiede definire la funzione anche sui punti che si aggiungono.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (a, b) \longrightarrow a + b \end{cases}$$

$$f_{|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} : \begin{cases} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \\ (a, b) \to a + b \end{cases}$$

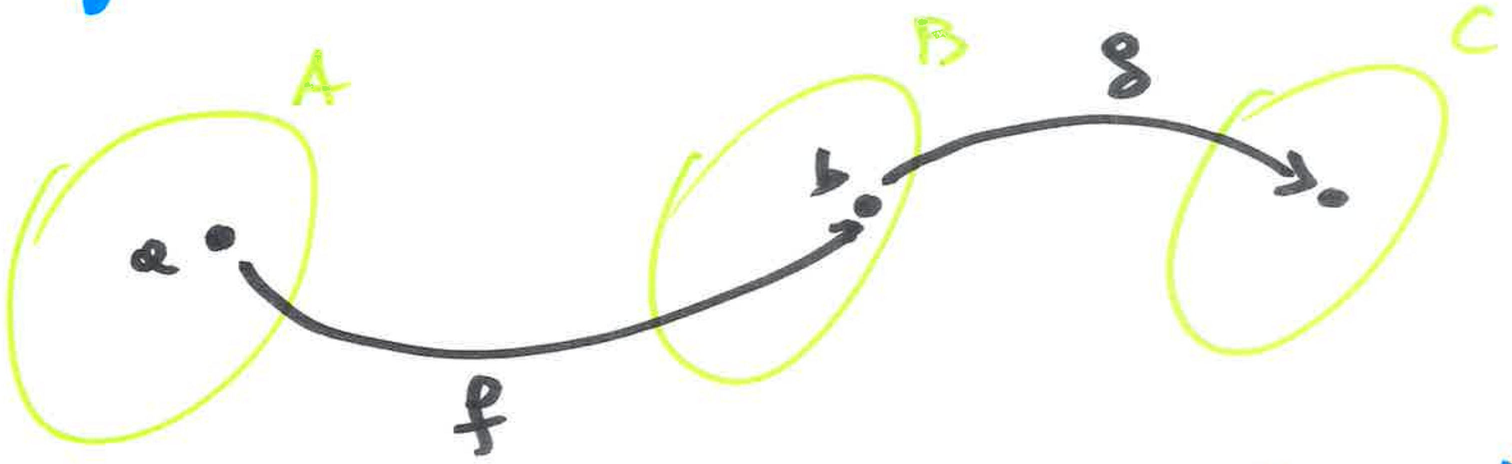
$$f^{|\mathbb{Q}}_{|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} : \begin{cases} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \\ (a, b) \to a + b \end{cases}$$

Composizione di funzioni

$f: A \to B$

$g: B \to C$

funzioni



Tali che il dominio di g coincida col codominio di f

$$(g \circ f) = \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a,b) \in f,\ (b,c) \in g\}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

→ la composizione di funzioni e' associativa.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$f: A \to B$

$g: B \to C$

$h: C \to D$

$g \circ f : A \to C$

~~$g \circ f$~~

$h \circ g : B \to D$

$h \circ (g \circ f) : A \to D$

$(h \circ g) \circ f : A \to D$

$$(g \circ f) = \{(a,c) \in A \times C : \exists b \in B : (a,b) \in f,\ (b,c) \in g\}$$

$$h \circ (g \circ f) = \{(a,d) \in A \times D \mid \exists c \in C : (a,c) \in (g \circ f),\ (c,d) \in h\} =$$

$$= \{(a,d) \in A \times D \mid \exists c \in C : \exists b \in B : (a,b) \in f,\ (b,c) \in g,\ (c,d) \in h\}.$$

$$(h \circ g) \circ f = \{(a,d) \in A \times D \mid \exists b \in B : (a,b) \in f,\ (b,d) \in (h \circ g)\} =$$

$$= \{(a,d) \in A \times D \mid \exists b \in B : (a,b) \in f,\ \exists c \in C : (b,c) \in g \quad (c,d) \in h\}.$$

$f : A \to B$ é una corrispondenza funzionale ovunque definita

$f = \{(a,b) \in A \times B \mid \dots \}$.

$f^{opp} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in A \times B\}$.

1) Quando f^{opp} é una funzione?

2) Supposto che $f^{opp} : B \to A$ sia una funzione che cosa é $f \circ f^{opp}$?

$f^{opp} \circ f$?

1) Affinché f^{opp} sia una funzione serve che

$\forall b \in B \; \exists! \, a \in A : (a,b) \in f$

$\rightarrow (b,a) \in f^{opp}$

A) $\forall b \in B \; \exists \, a \in A : f(a) = b$ cioè

$f(A) = B$

la funzione f è <u>suriettiva</u>

(i.e. la sua immagine coincide col codominio).

[in ogni caso $f^{|f(A)} : A \to f(A)$ suriettiva]

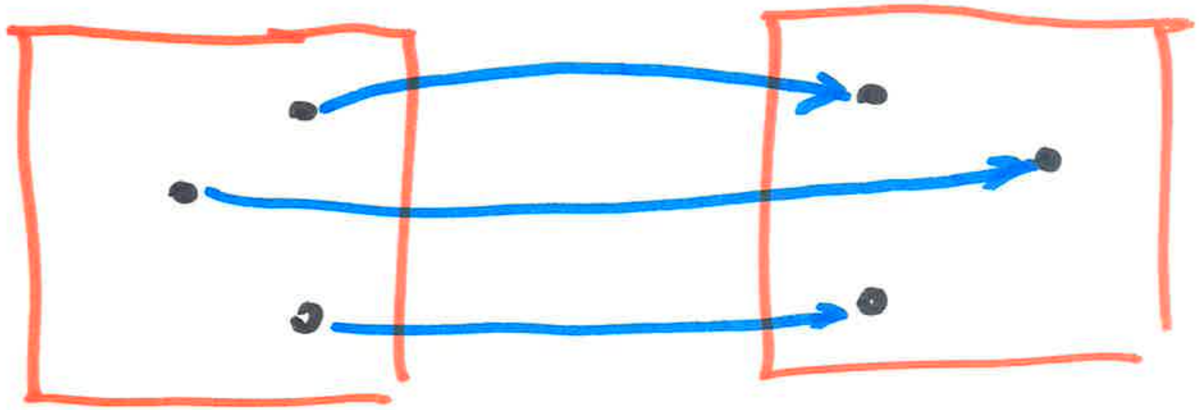
B) $\forall b \in B \ \exists_{\leq 1} a \in A : f(a) = b.$

ovvero [se $a, a' \in A$:

$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$]

la funzione f è <u>iniettiva</u>

INIETTIVA + SURIETTIVA $\rightarrow$ f è biiettiva



OSS: Quanti sono gli elementi di B rispetto il numero di elementi di A.

DATO A si DICE $|A|$ cardinalità di A il numero di suoi elementi.

Se $\exists\ f : A \to B$ biiettiva $\Rightarrow$

ad ogni elemento di A corrisponde uno ed un solo elemento di B e viceversa ad ogni elemento di B corrisponde uno ed uno solo elemento di A.

$$|A| = |B|$$

Se $|A| < \infty$ (cioè $\exists$ una biiezione fra A ed un sottoinsieme $J_n = \{1, 2, \dots n\} \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow$ ok).

Se $|A| < \infty$ e $B \subseteq A$ con $B \neq A$

$\Rightarrow |B| < |A|$

$\boxed{|A| = |B| \ \& \ B \subseteq A \Rightarrow B = A}$

$$f \begin{cases} \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z} \\ x \longrightarrow 2x \end{cases} \qquad 2\mathbb{Z} = \{2\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}\}.$$

f é biettiva.

Suriettiva in quanto $\forall$ numero pari si ottiene moltiplicando un dispari per 2.

iniettiva $\quad f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$

Un insieme X ha cardinalità ∞ se $\exists\, Y$ con $Y \subsetneq X$ $(Y \neq X)$ tale che $\exists$ una biiezione $f : X \to Y$.

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$$

numerabili "potenza del continuo"