Conica: $\mathcal{C}$ curva algebrica[1] reale[2] piana[3] del II ordine[4].

[3] piana: definita in $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ e quindi in un piano proiettivo

[1] curva algebrica: luogo dei punti di un piano proiettivo (3) che soddisfano una equazione $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ omogenea ove F è un polinomio.

[2] reale: i coeff. di $F(x_1, x_2, x_3)$ sono numeri reali. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathcal{C}$ ammette almeno una eq. reale).

↳ II ordine : deg $F(x_1\ x_2\ x_3) = 2$

$$F(x_1\ x_2\ x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

con $(a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{33}) \neq \underline{0}$ II ordine reale.

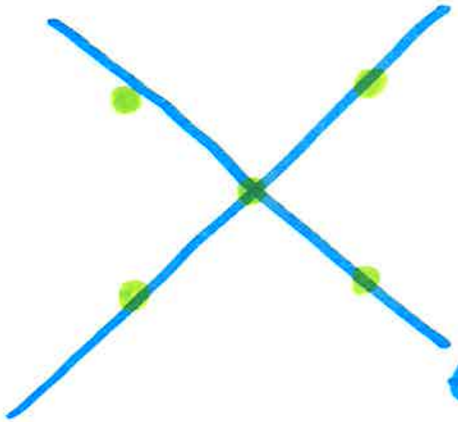
$a_{ij} \in \mathbb{R}$

<u>OSS</u>: coeff. proporzionali danno la medesima curva.

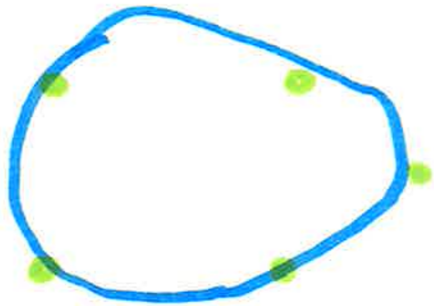
→ 1) ci sono ∞^5 coniche (6 coeff. a meno di proporzionalità)

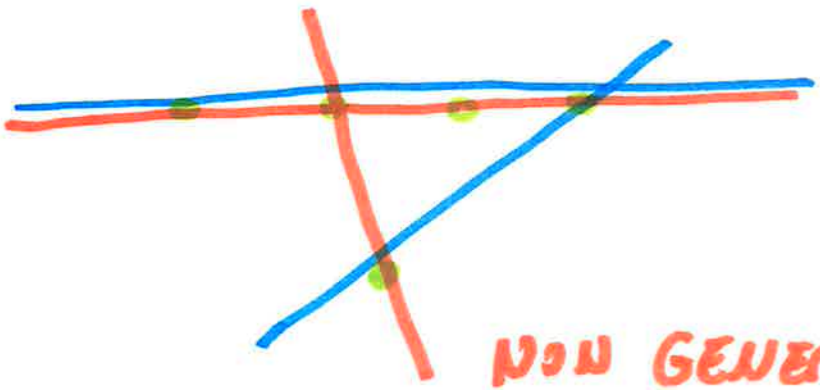
2) per 5 punti in posizione gen.: $\exists!$ conica.

ove per posizione generale si intende che il rango della matrice ~~[illegible]~~ del sistema che impone il passaggio della conica per essi è 5.



e





NON GENERALE

Teorema: Una conica NON HA PUNTI TRIPLI.

1) Essa ha un punto doppio $\Leftrightarrow$ è riducibile

3) Se ha esattamente un punto doppio una conica si spezza nell'unione di 2 rette che si intersecano in esso.

4) Se una conica ha almeno 2 pti doppi $\Rightarrow$ $\forall$ suo punto è doppio e la conica è una retta contata 2 volte.

DIM 1) Se $P \in \mathcal{C}$ e P triplo $\Rightarrow$ $\forall$ retta per P è contenuta nella conica $\Rightarrow$ $\mathcal{C} = \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ ASSURDO

$|\mathcal{C}| = \infty$ in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$.

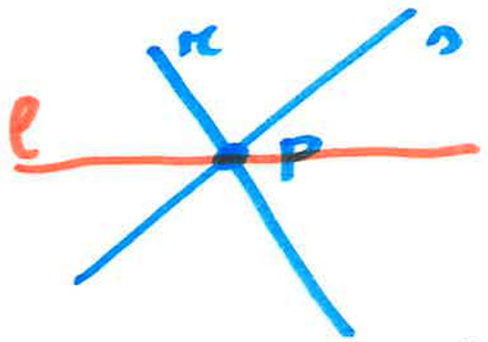
2) Sia $P \in \mathcal{C}$, P doppio.
Sia dunque $R \in \mathcal{C}$ con $R \neq P$.
La retta RP interseca $\mathcal{C}$ almeno 3 volte

$\Rightarrow$ è componente di $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ l'eq. di $\mathcal{C}$

si fattorizza nel prodotto di 2 polinomi di I grado $\Rightarrow \mathcal{C}$ è unione di due rette.

3) Supponiamo che $\mathcal{C}$ sia unione di 2 rette $r \cup s$.

poniamo $P = r \cap s$. $\Rightarrow P$ è doppio per $\mathcal{C}$.



Sia ℓ una retta per P

se $\ell \neq r, s \Rightarrow \ell$ interseca

non solamente in P

ma le intersezioni di ℓ con $\mathcal{C} = r \cup s$ sono 2.

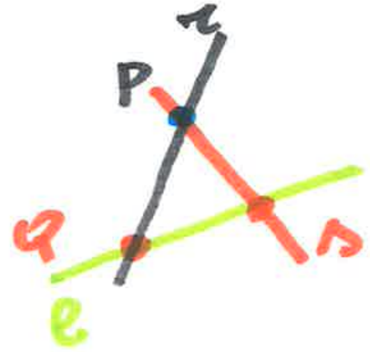
$\Rightarrow P$ è doppio.

viceversa sia P l'unico punto doppio di $\mathcal{C}$

e $Q \in \mathcal{C}$, $Q \neq P$

per ipotesi $\mathcal{C} = r \cup s$

e $P \in r \cap s$



poiché Q non è doppio $\exists$ una retta ℓ per Q che interseca $\mathcal{C}$

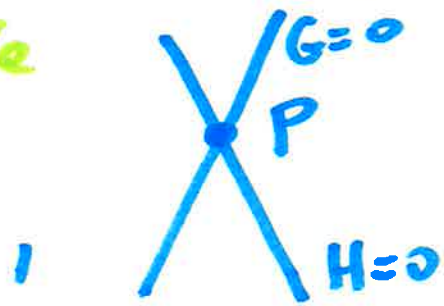
in 2 punti distinti. Sia R un punto su $\ell \cap \mathcal{C}$ diverso da Q. $\Rightarrow R \notin r$ ove $r = PQ \Rightarrow R \in s$

ed $s \neq r$.

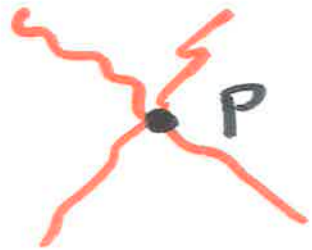
N.B.: poiché la conica è reale $F = GH = \overline{F} = \overline{G}\,\overline{H}$

ove G, H polinomi di I grado.

In particolare o $G = \overline{G}$, $H = \overline{H}$ e dunque la conica si spezza in 2 rette reali e distinte



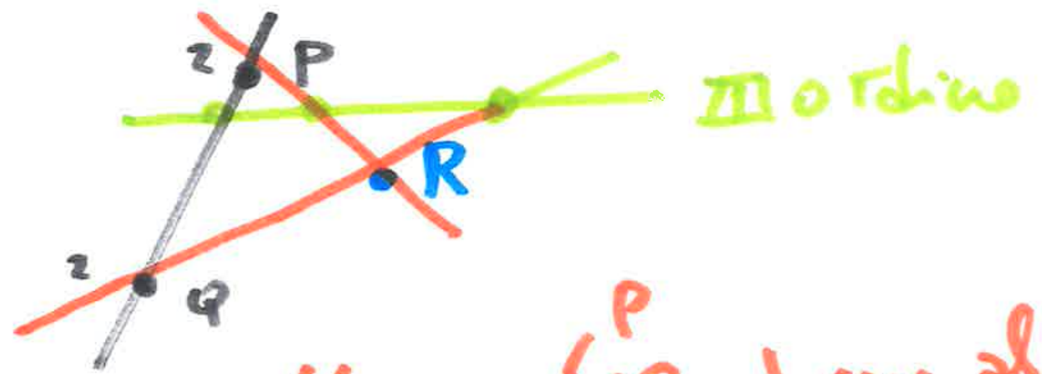
oppure $G = \overline{H}$ ed $H = \overline{G}$ con $H \neq G$ $\Rightarrow$ la conica si spezza in 2 rette immaginarie e coniugate



ed in tale caso $\exists!$ punto reale.

4) Supponiamo $\mathcal{C}$ abbia 2 punti doppi

P, Q



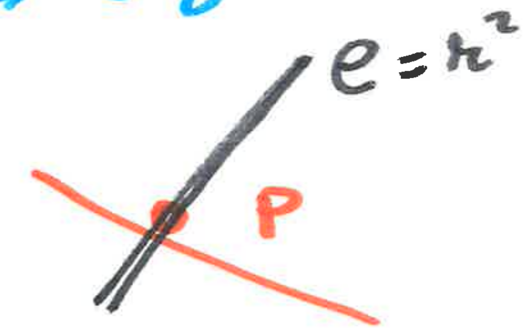
In particolare ogni retta per $\left(\begin{smallmatrix}P\\Q\end{smallmatrix}\right.$ ed un altro punto di $\mathcal{C}$ deve essere contenuta in $\mathcal{C}$.

Sia $R \in \mathcal{C}$ con $R \neq P$, $R \neq Q \Rightarrow PR \subseteq \mathcal{C}$, $QR \subseteq \mathcal{C}$

se fosse $R \notin PQ \Rightarrow$ la conica conterrebbe 3 rette distinte! $\Rightarrow$ sarebbe una curva almeno del III ordine $\lightning \Rightarrow R \in PQ$).

$\Rightarrow$ La conica si riduce nella retta (PQ) contata 2 volte.

Viceversa: se $\mathcal{C}$ è una retta contata 2 volte $\Rightarrow$ ogni suo punto è doppio.



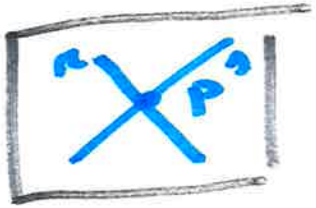
Infatti ogni retta per un suo punto P la interseca nel solo P ma deve intersecarla 2 volte $\Rightarrow$ P è doppio. #

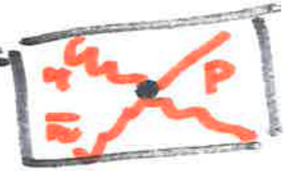
<u>Def</u>: Una conica è detta <u>singolare</u> se ha un punto doppio
<u>riducibile</u> se si spezza (in rette)
<u>generale</u> se è priva di punti doppi.
<u>irriducibile</u> se non si spezza in curve di grado più basso

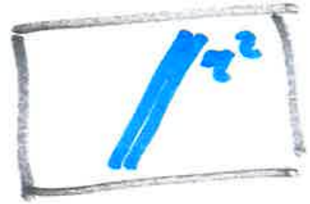
Una conica è SINGOLARE $\iff$ RIDUCIBILE

GENERALE $\iff$ IRRIDUCIBILE.

CLASSIFICAZIONE CONICHE SINGOLARI.

1) 

2. 

3 

$$F(x_1 x_2 x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2.$$

poniamo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ $A = {}^tA$

oss. $F(x_1\ x_2\ x_3) = (x_1\ x_2\ x_3)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

1) A é detta matrice della conica.
2) A é una matrice reale e simmetrica.
3) A definisce in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ (in $\mathbb{R}^3$) un prodotto scalare.

$$\beta((x_1\ x_2\ x_3),(y_1\ y_2, y_3)) := (x_1\ x_2\ x_3)A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

4) Indico con $\perp_e$ il fatto che

$$\beta((x_1\ x_2\ x_3),(y_1\ y_2, y_3))=0 \Leftrightarrow X \perp_e Y$$

$X=[(x_1\ x_2\ x_3)]$ $Y=[(y_1\ y_2\ y_3)]$

5) $\forall$ punto $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ si ha $P \perp_{\mathcal{C}} P \Leftrightarrow P \in \mathcal{C}$.

[I punti della conica sono tutti e soli i punti "ortogonali a se stessi" rispetto il prod. scalare indotto dalla matrice A associata alla conica]

Def: Sia $\mathcal{C}$ una conica (con matrice A associata). Si dice che 2 punti P e Q sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}$ se $P \perp_{\mathcal{C}} Q$.
$\mathcal{C}$ consta di tutti i punti autoconiugati rispetto ad essa. $P \perp_{\mathcal{C}} P$.

Sia $\mathcal{C}$ una conica. Ricordiamoci che $P \in \mathcal{C}$ è doppio $\iff$ $\nabla F|_P = \underline{0}$ cioè $\iff$ $\frac{\partial F}{\partial x_1}\Big|_P = \frac{\partial F}{\partial x_2}\Big|_P = \frac{\partial F}{\partial x_3}\Big|_P = F|_P = 0$

CACCOLIAMO $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} \right) =$

$$= \left(2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3, \; 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3, \; 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3 \right) = 2A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

PROP $P = [(p_1 \; p_2 \; p_3)]$ è doppio per $\mathcal{C}$ $\iff$ $P \in \mathrm{Ker}(A)$.

Infatti $P \in \mathrm{Ker}(A) \Rightarrow \nabla F|_P = \underline{0}$ & $AP = \underline{0}$ da cui ${}^tPAP = 0. \Rightarrow P \in \mathcal{C}$.

Viceversa P doppio $\Rightarrow$ $\nabla F|_P = \underline{0}$ $\Rightarrow$ $AP = \underline{0}$

$\Rightarrow P \in Ker(A)$

$\square$

<u>OSS</u>: A è matrice reale e simmetrica

$\Rightarrow A$ è diagonalizzabile $\Rightarrow A$ ha 3 autovalori.

α, β, γ.

1) Se $0 \notin \{\alpha, \beta, \gamma\} \Rightarrow A$ è una conica generale.

2) Se $m_a(0) = m_g(0) = 2 \Rightarrow \dim Ker\, A = 2$

$\Rightarrow \exists$ una retta di punti doppi $\Rightarrow$

la conica si spezza in una retta

contata 2 volte.

3) $m_a(0) = 1 \Rightarrow \alpha \neq 0 \neq \beta \quad \gamma = 0$

la conica si spezza in 2 rette distinte.

$$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 = 0$$

CASO 1) $\alpha\beta < 0 \Rightarrow \alpha > 0\ ,\ \beta < 0$

$$\sqrt{|\alpha|}^2 x_1^2 - \sqrt{|\beta|}^2 x_2^2 =$$

$$= \left(\sqrt{|\alpha|}\, x_1 + \sqrt{|\beta|}\, x_2\right)\left(\sqrt{|\alpha|}\, x_1 - \sqrt{|\beta|}\, x_2\right)$$

2 rette reali e distinte.

2 rette immaginarie e coniugate.

CASO 2) $\alpha\beta > 0 \Rightarrow \alpha > 0\ \ \beta > 0$

$$\left(\sqrt{|\alpha|}^2 x_1^2 + \sqrt{|\beta|}^2 x_2^2\right) =$$

$$= \left(\sqrt{|\alpha|}\, x_1 + i\sqrt{|\beta|}\, x_2\right)\left(\sqrt{|\alpha|}\, x_1 - i\sqrt{|\beta|}\, x_2\right)$$

CONICHE GENERALI.

OSS 1) Se A ha 3 autovalori dello stesso segno $(+++)$ $(---)$

$\Rightarrow$ il prod. scalare indotto da A è definito positivo o definito negativo.

$$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 =$$

$\rightarrow$ in particolare avete una conica $\mathcal{C}$ generale ma priva di punti reali. perché non ci sono punti autoconiugati.

$$x^2+y^2=-1 \qquad \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Es: quando $x^2+y^2=d$ è conica generale? $d \neq 0$; per $d=0$ si spezza in $x \pm iy = 0$

<u>Def</u>: Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica di eq. $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ e sia $P \in \mathcal{C}$ un suo punto semplice. Si dice tangente a $\mathcal{C}$ in P ogni retta (ne esiste una e una sola) r con $P \in r \cap \mathcal{C}$ e tale che r intersechi $\mathcal{C}$ in P almeno 2 volte.

Teorema: La tg a $\mathcal{C}$ in P ha equazione:

$$\nabla F|_P \cdot (x_1\ x_2\ x_3) = 0$$

Luogo delle tg. ad una conica per un punto.

Siano $P = [(x_1' \; x_2' \; x_3')]$

$Q = [(y_1' \; y_2' \; y_3')]$

due punti distinti; $\mathcal{C}$ una conica ed

A la sua matrice.

Vogliamo trovare quando la retta PQ

è tangente ad A.

$$X(\lambda, \mu) := [\lambda(x_1' \; x_2' \; x_3') + \mu(y_1' \; y_2' \; y_3')]$$

vediamo quando abbiamo 2 intersezioni coincidenti

con $\mathcal{C}$. $\quad {}^{T}XAX = 0$

$$\left[\left(\rho\,(x_1'\;x_2'\;x_3')+\mu\,(y_1'\;y_2'\;y_3')\right)\right] A \left[\begin{bmatrix}\rho x_1'\\ \rho x_2'\\ \rho x_3'\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}y_1'\\ y_2'\\ y_3'\end{bmatrix}\right]=0$$

$$\rho^2\,(x_1'\;x_2'\;x_3')\,A\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}+\mu^2\,(y_1'\;y_2'\;y_3')\,A\begin{pmatrix}y_1'\\ y_2'\\ y_3'\end{pmatrix}+$$

$$+\,2\rho\mu\,(x_1'\;x_2'\;x_3')\,A\begin{pmatrix}y_1'\\ y_2'\\ y_3'\end{pmatrix}=0$$

TANGENZA $\Rightarrow$ $\Delta=0$

$$\left[(x_1'\;x_2'\;x_3')\,A\begin{pmatrix}y_1'\\ y_2'\\ y_3'\end{pmatrix}\right]^2-({}^tPAP)({}^tQAQ)=0$$

$$({}^{T}PAQ)^2 - ({}^{T}PAP)({}^{T}QAQ) = 0$$

supponiamo ora che $Q \in \mathcal{C}$.

$\Rightarrow$ la condizione di tangenza diventa

$$\boxed{{}^{T}PAQ = 0} \quad \text{perché } {}^{T}QAQ = 0$$

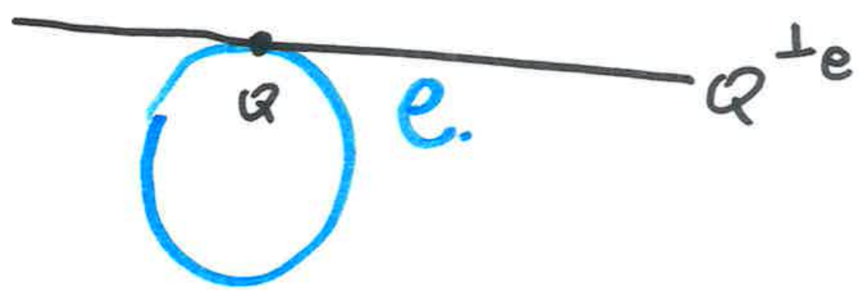
in particolare il luogo dei punti che sono sulla tg. in Q alla conica deve soddisfare

$${}^{T}XAQ = 0 \quad \text{cioè} \quad {}^{T}QAX = 0$$

ovvero é il luogo dei punti:

$$Q^{\perp_\mathcal{C}} := \{X \mid \beta(X,Q)=0\} =$$

$$= \{X \mid {}^tQAX = 0\}.$$



$Q^{\perp_\mathcal{C}}$ é la retta tg. in Q alla conica $\mathcal{C}$ a patto che $Q \in \mathcal{C}$.

cosa succede se calcoliamo $P^{\perp_\mathcal{C}}$ con $P \notin \mathcal{C}$??

polari e principio di reciprocità.

Def: Sia $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$, $\mathcal{C}$ una conica generale, A la matrice ~~[illegible]~~ simmetrica associata a $\mathcal{C}$, β il rispettivo prodotto scalare e $\perp_e$ la relazione indotta di ortogonalità, e p una retta.

Def: Si dice che p è <u>polare</u> di P se $p = P^{\perp_e}$; P è detto <u>polo</u> di p.

In particolare $P = p^{\perp_e}$

Se $P \in \mathcal{C} \Rightarrow p = P^{\perp_e}$ è la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P.

OSS: poiché $\mathcal{C}$ è generale, $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ se P è un punto $\Rightarrow P^{\perp_e}$ è un sott. di dim vettoriale $3-1=2$ ed è una retta.

Viceversa se r_0 è una retta $\Rightarrow$ sott. di dim. vettoriale $= 2 \Rightarrow p^{\perp}e = P$ è un sott. di dim $= 3-2=1 \Rightarrow$ PUNTO.

principio di reciprocità: se $\boxed{P \in r_0 \iff r_0^{\perp} \in P^{\perp}}$

vale in generale per i prodotti scalari.

Sia r_0 una retta $\Rightarrow$ le polari $P^{\perp}$ dei punti P di r_0 passano per il polo $r^{\perp}$ di r_0

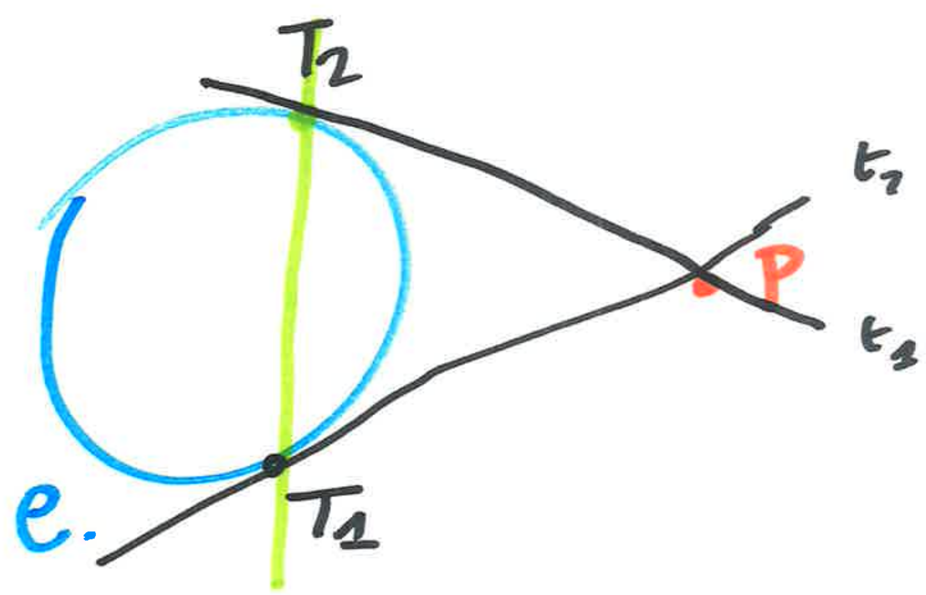
Viceversa i poli $q^{\perp}$ delle rette q passanti per un punto P appartengono alla polare $P^{\perp}$ di P.

I poli delle rette per P appartengono alla polare di P

Le polari dei punti di r passano per il polo di r.

$$\underset{\text{polo}}{P} \in \underset{\text{polare}}{r} \iff \underset{\text{polo}}{r^\perp} \in \underset{\text{polare}}{P^\perp}$$

<u>Teorema</u>: Sia $\mathcal{C}$ una conica e $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$.
Allora la polare di P interseca $\mathcal{C}$ esattamente nei 2 punti di tangenza delle rette per P tangenti a $\mathcal{C}$.
(Se $P \in \mathcal{C} \Rightarrow$ tali punti coincidono e abbiamo polare = tangente).



Se $P \in \mathcal{C} \Rightarrow$ GIÀ VISTO.

Se $P \notin \mathcal{C} \Rightarrow \exists\, 2$ tangenti per P; siano T_1 e T_2 i punti di tg. $T_1 \neq T_2$

$P \in t_1 = T_1^{\perp e}$ $\Rightarrow$ P appartiene alla polare di T_1

$\Rightarrow$ T_1 appartiene alla polare ~~p~~ di P

$P \in t_2 = T_2^{\perp e}$ $\Rightarrow$ P appartiene alla polare di T_2

$\Rightarrow$ T_2 appartiene alla polare di P

ma per T_1 e T_2 $\quad T_1 \neq T_2$ passa una ed una sola retta e la polare di P é una retta $\Rightarrow p_0 = (T_1T_2)$

la polare di P é la retta (T_1T_2). $\square$

<u>oss:</u> ~~Per~~ Un punto $P \notin \mathscr{C}$ esistono sempre 2 tangenti distinte ~~ma~~ queste possono essere

1) reali e distinte $\Rightarrow$ P é detto ESTERNO a $\mathscr{C}$
2) immaginarie e coniugate $\Rightarrow$ P é detto interno a $\mathscr{C}$.

$\rightarrow$ se P é interno a $\mathscr{C}$ $\Rightarrow$ la polare di P sará una retta <u>reale</u> che non interseca $\mathscr{C}$ in alcun punto reale. $\square$