Geometria Analitica (applicazione di algebra lineare).

→ Sottospazi vettoriali e loro traslati.

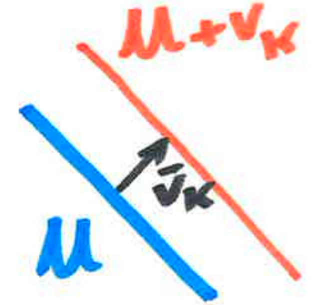
SOTTOSPAZIO di dimensione K $\longleftrightarrow$ TRASLATO DI "DIM. K" $\leftrightarrow$ ENTE GEOM. DI DIM. K

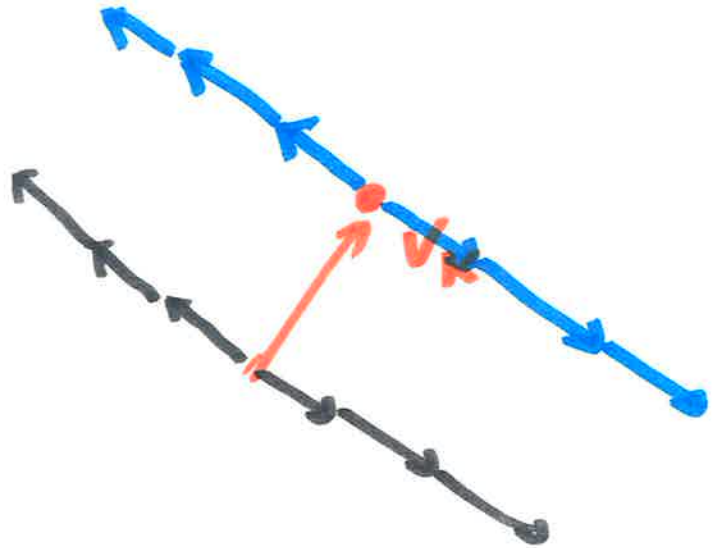
→ con ∞^K elementi

$$\mathcal{U}_K \leq V_n \longrightarrow \bar{v} + \mathcal{U}_K \leftrightarrow [\bar{v}; \mathcal{U}_K]$$

punto — sott. di traslazione

$$\bar{v} + \mathcal{U}_K = \{\bar{v} + \bar{u} \mid \bar{u} \in \mathcal{U}_K\} = [\bar{v}; \mathcal{U}_K]$$





__Def.:__ Uno spazio affine $A_n(\mathbb{K}) = AG_n(\mathbb{K}) = AG(n, \mathbb{K})$ è una terna (A, V_n, f) con $f: A \times A \to V_n$ che gode delle seguenti proprietà

1) $V_n(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. (di dim $= n$).
2) $\forall P \in A \ \forall \bar{v} \in V_n \ \exists! Q \in A : f(P, Q) = \bar{v}$
   scriveremo anche $Q = P + \bar{v}$ e diremo che Q è il traslato di P mediante $\bar{v}$

3) ~~∀R~~ o anche $\overrightarrow{PQ} = \bar{v}$

3) $\forall\, P, Q, R \in A$: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

→ Gli elementi di A sono detti **PUNTI**

N.B.

$$\underbrace{Q}_{\text{punto}} = \underbrace{P}_{\text{punto}} + \underbrace{\bar{v}}_{\text{vettore}}$$

OSS: 1) $\overrightarrow{PP} = \underline{0}$ infatti $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP}$ per (3) $\Rightarrow$ sottraendo si ottiene $\overrightarrow{PP} = \underline{0}$

viceversa $\overrightarrow{PQ} = \underline{0}$ $\Rightarrow f(P, Q) = \underline{0}$ ma per (2) $\exists$ un unico Q con questa proprietà $\Rightarrow P = Q$.

2) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \underline{0} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

3) $\exists$ una biiezione fra gli elementi di A ed i vettori di $V_n(\mathbb{K})$.

Se $A \neq \emptyset \Rightarrow$ prendiamo $P \in A$.

Sia $Q \in A \Rightarrow f(P,Q)$ é un vettore di V univocam. determinato. e osserviamo che la funzione

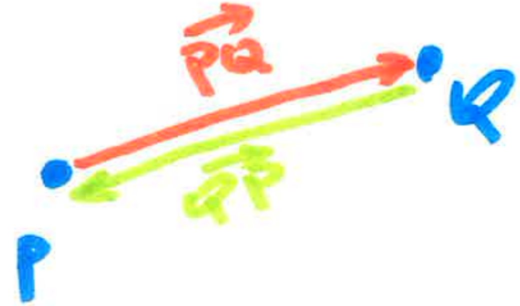
$$f_P : \begin{cases} A \to V_n(\mathbb{K}) \\ Q \to \overrightarrow{PQ} = f(P,Q) \end{cases}$$

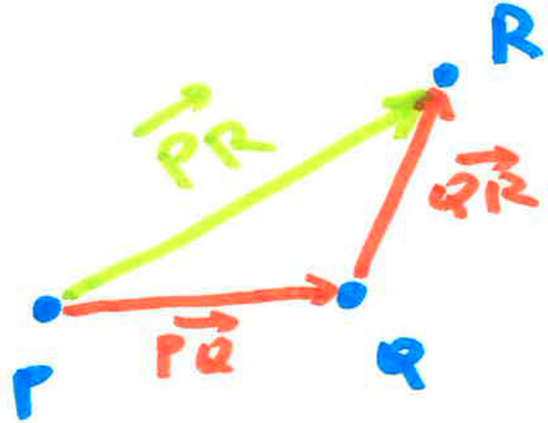
è sicuramente iniettiva

infatti $f_P(X) = f_P(Y) \Rightarrow \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PY} \Rightarrow$ per la 2

$$X = P + \overrightarrow{PX} = P + \overrightarrow{PY} = Y$$

Viceversa, sempre per la 2, $\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{K})\ \exists\ Q = P + \bar{v} \in A$: $\overrightarrow{PQ} = \bar{v} \Rightarrow f_P$ è anche suriettiva.





SOTTOSPAZIO AFFINE

Sia $(A, V_n(\mathbb{K}), f)$ uno spazio affine. Si dice sottospazio affine di A un insieme $A' \subseteq A$ di punti tali che $\exists\, W \leq V_n(\mathbb{K})$ con

$$f_{|A' \times A'}^{|W} : A' \times A' \to W$$

tale che $(A', W, f_{|A' \times A'}^{|W})$ sia uno spazio affine.

$$\begin{array}{ccc} [A, & V, & f] \\ \cup\!\mid & \vee\!\mid & \\ [A' & W, & f_{|A' \times A'}^{|W}] \end{array}$$

SOTTOSPAZIO LINEARE

Sia $P \in A$; $W \leq V_n(\mathbb{K})$

$$[P; W] := \{P + \bar{w} \mid \bar{w} \in W\}.$$

Teorema: I sottospazi affini (non vuoti) di $A_n(\mathbb{K})$ sono tutti e soli i suoi sottosp. lineari.

DIM

1) $[P; W]$ è un sottospazio affine

$$([P; W], W, f_{|\_}^{|W}).$$

basta mostrare che a) $\forall\ R, S \in [P; W] \Rightarrow \overrightarrow{RS} \in W$

b) e che $\forall R \in [P; W]$ & $\forall \bar{w} \in W$: $R + \bar{w} \in W$.

a) Siano $R, S \in [P; W] \Rightarrow \exists\ \underset{\in W}{\bar{u}, \bar{t}}$: $R = P + \bar{u}$, $S = P + \bar{t}$

$\Rightarrow \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS} = -\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS} = -\bar{u} + \bar{t} \in W$.

b) Sia $R \in [P; W]$ $\bar{w} \in W \Rightarrow \exists\ \bar{u} \in W$: $R = P + \bar{u}$

consideriamo $R + \bar{w} = (P + \bar{u}) + \bar{w} =$

$= P + (\bar{u} + \bar{w})$ con $\bar{u} + \bar{w} \in W$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow R + \bar{w} \in W$. $\square$

2) Sia (A', W, f_1') un sottospazio affine non vuoto. e sia $P \in A'$. Vogliamo mostrare $A' = [P; W]$

osserviamo che per gli assiomi $\forall \bar{w} \in W$, $P + \bar{w} \in A'$

$\Rightarrow [P;W] \subseteq A'$.

D'altro canto $\forall Q \in A'$ $\exists \bar{w} \in W$: $\overrightarrow{PQ} = \bar{w}$

perché la f_1' ristretta e troncata ha valori in W

$\Rightarrow Q \in [P;W] \Rightarrow A' \subseteq [P;W]$

$\square$

<u>Def</u>: Sia $\Sigma = [P;W]$ un sottospazio lineare di $A_n(\mathbb{K})$.

Si dice che P è una <u>origine</u> per Σ

e che W è il <u>sottospazio di traslazione</u> di Σ.

Inoltre si pone $\dim [P;W] := \dim W$.

In particolare: Se $\dim(W) = 0 \Rightarrow [P;\{\underline{0}\}] = \{P\}$.

identifichiamo il sottospazio il cui unico elemento è P con P stesso.

e chiamiamo tale elemento PUNTO

dim (W)	NOMI
0	punti
1	rette
2	piani
3	solidi
n-1	iperpiani

se in $A_n(\mathbb{K})$.

<u>OSS</u>: Sia $[P;W]$ un sottospazio lineare $\Rightarrow$

$\forall Q \in [P;W] : [P;W] = [Q;W]$

OGNI PUNTO DI $[P;W]$ è una possibile ORIGINE PER $[P;W]$.

OSSERVIAMO CHE se $Q \in [P;W] \Rightarrow Q = P + \bar{w}$

$\Rightarrow \forall R \in [Q;W]$ abbiamo $\exists\, \bar{s} \in W$ tale che $R = Q + \bar{s} = (P + \bar{w}) + \bar{s} = P + (\bar{w} + \bar{s})$

$\Rightarrow R \in [P;W] \Rightarrow [Q;W] \subseteq [P;W]$.

D'altro canto anche $P \in [Q;W]$ in quanto $P = Q - \bar{w}$ e $-\bar{w} \in W \Rightarrow$ per il medesimo ragionamento $[P;W] \subseteq [Q;W]$.

$\square$

Def: Sia $A_n(\mathbb{K}) = (A, V_n(\mathbb{K}), f)$ uno spazio affine.
Diciamo riferimento affine RA $\Gamma = (P, \mathcal{B})$ una coppia ordinata ove $P \in A$; $\mathcal{B}$ è una base ordinata di $V_n(\mathbb{K})$.

COORDINATIZZAZIONE.

$$\Gamma = (O, \mathcal{B})$$

O = ORIGINE

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

$$\Phi_\Gamma : \begin{cases} A \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ P \longrightarrow (p_1 p_2 \dots p_n) \end{cases}$$

Deve essere una funzione biettiva $\rightarrow$ 1) AD OGNI PUNTO CORRISPONDONO DELLE COORDINATE

2) AD OGNI COORDINATA CORRISPONDE UN UNICO PUNTO.

Sia $Q \in A \Rightarrow$

~~Sia R, Q ∈ A ⇒ RQ~~ $\exists \bar{v} = \overrightarrow{OQ} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{v} \in W$ abbiamo $\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 + \dots + v_n\bar{e}_n$

PONIAMO $\Phi_\Gamma(Q) = (v_1 \dots v_n)$

⌜ Le coordinate di Q rispetto $\Gamma = (O, \mathcal{B})$ sono le componenti del vettore $\vec{OQ}$ rispetto la base $\mathcal{B}$. ⌟

<u>OSS</u>: $\Phi_r(P) = \Phi(Q) \iff \vec{OP} = \vec{OQ} \iff P = Q$.

la funzione è iniettiva.

DATO $(v_1 \dots v_n) \in \mathbb{K}^n$ consideriamo

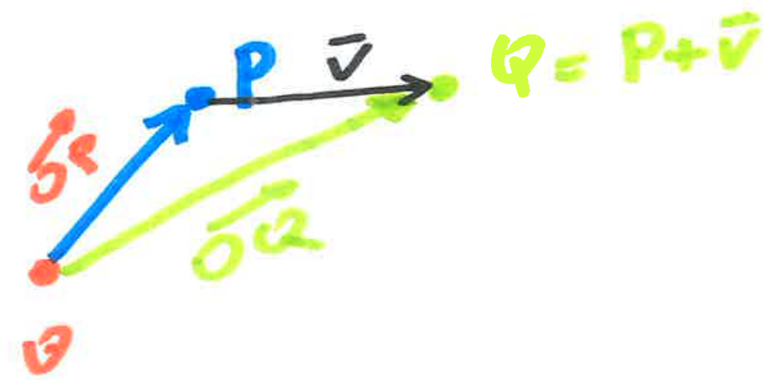
$\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + \dots + v_n\bar{e}_n$ e poniamo $Q = O + \bar{v}$

$\Rightarrow \Phi_r(Q) = (v_1 \dots v_n) \Rightarrow$ la funzione è suriettiva.

Teorema: Sia A_n uno spazio affine di dim $= n$ e sia $\Gamma = (O, \mathcal{B})$ un suo riferimento affine e Φ_Γ la coordinatizzazione. Allora $\forall\, P, Q \in A$ le componenti del vettore $\overrightarrow{PQ}$ rispetto la base $\mathcal{B}$ sono date da

$$\Phi_\Gamma(Q) - \Phi_\Gamma(P).$$

In particolare se P è un punto di coordinate $(p_1 \dots p_n)$ e $\bar{v}$ è un vettore di componenti rispetto a $\mathcal{B}$ $(v_1 \dots v_n)$ $\Rightarrow$ il punto $P + \bar{v}$ avrà coordinate $(p_1+v_1 \dots p_n+v_n)$



I vettori si possono sommare.

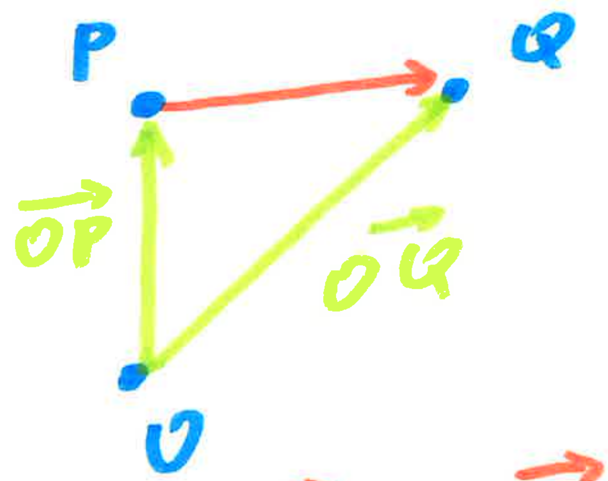
Si può "sommare" un vettore ad un punto

NON SI POSSONO SOMMARE 2 PUNTI.

(però $\Phi(Q) - \Phi(P)$ è un vettore).

__DIM:__

Consideriamo 2 punti P, Q.



OSSERVIAMO CHE $\vec{PQ} = \vec{PO} + \vec{OQ} = -\vec{OP} + \vec{OQ}$

MA PASSANDO in componenti abbiamo che

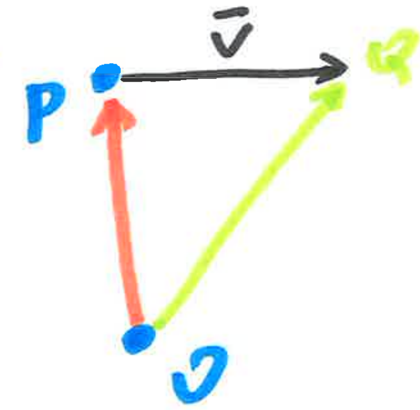
$\vec{OQ}$ ha come componenti proprio $\Phi_n(Q)$

ed $\vec{OP}$ ha come componenti $\Phi_n(P)$.

$\Rightarrow$ componenti $\vec{PQ}$ sono $\Phi_n(Q) - \Phi_n(P)$.

Sia $\bar{v} = \sum v_i \bar{e}_i$ un vettore di $V_n(\mathbb{K})$

P un punto di A_n di coordinate $(p_1 \dots p_n)$ rispetto ~~a~~ Γ.



Sia $Q = P + \bar{v}$

le componenti del vettore $\overrightarrow{OQ}$ sono le componenti del vettore $\overrightarrow{OP} + \bar{v}$ $\Rightarrow$ sono date da $(p_1 + v_1 \dots p_n + v_n)$

Infatti vediamo che $\Phi_\Gamma(Q) - \Phi_\Gamma(P) = (v_1 \dots v_n) \Rightarrow$

~~vettora~~ ~~V~~ $\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \sum v_i \bar{e}_i = \bar{v}$.

□

Fissato un riferimento affine, descrivere una retta.

Una retta $r = [P, V_1]$ in coordinate si descrive come l'insieme dei punti della forma

$$(p_1 \dots p_n) + \mathcal{L}((v_1 \dots v_n)) =$$

$$= \{(p_1 + \alpha v_1 \;\; p_2 + \alpha v_2 \dots p_n + \alpha v_n) \mid \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

$n = 2$ $\quad P = (x_0, y_0)$ $\quad V_1 = \mathcal{L}((\ell, m))$

con $(\ell, m) \neq (0,0)$.

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \end{cases}$$ eq. parametrica retta nel piano.

$\ell \neq 0$ $\quad \dfrac{x - x_0}{\ell} = t = \dfrac{y - y_0}{m}$ $\quad$ e $\quad \dfrac{x - x_0}{\ell} = \dfrac{y - y_0}{m}$ eq. cartesiana di una retta nel piano.

per una retta, il sottospazio V_1 di traslazione è detto direzione della retta stessa.

per un piano $[P, W_2]$ con $P = (x_0, y_0, z_0)$

$W_2 = \mathcal{L}((a,b,c),(d,e,f))$

con $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 2$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a + \beta d \\ y = y_0 + \alpha b + \beta e \\ z = z_0 + \alpha c + \beta f \end{cases}$$

eq. parametrica di un piano nello spazio.

Eq. cartesiana? $Q \in [P; W_2] \Leftrightarrow \vec{PQ} \in W_2$

$\vec{PQ} = (x\ y\ z) - (x_0\ y_0\ z_0)$

coord. di Q

coord. di P

$$(x-x_0 \quad y-y_0 \quad z-z_0) \in \mathcal{L}((a\ b\ c),(d\ e\ f))$$

$$\iff \operatorname{rk}\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 2$$

$$\iff \det\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 0$$

$$((x-x_0),(y-y_0),(z-z_0)) \cdot ((a\ b\ c) \times (d\ e\ f)) = 0$$

$$\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}(x-x_0) - \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}(y-y_0) + \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}(z-z_0) = 0$$

eq. cartesiana di un piano in A_3.

rette in $A_3(\mathbb{K})$

$r = [P; W_1]$

$P = (x_0 \; y_0 \; z_0)$

$W_1 = \mathcal{L}((l \; m \; n)).$

$Q \in r \iff Q = (x, y, z) = (x_0 + \alpha l, \; y_0 + \alpha m, \; z_0 + \alpha n).$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha l \\ y = y_0 + \alpha m \\ z = z_0 + \alpha n. \end{cases}$$ parametriche

$Q \in r \iff \overrightarrow{PQ} \in \mathcal{L}((l \; m \; n)) \iff$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ \ell & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_0 & z-z_0 \\ \ell & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ m & n \end{vmatrix}$$

$$\frac{x-x_0}{\ell} = \frac{y-y_0}{m} \qquad \frac{x-x_0}{\ell} = \frac{z-z_0}{n} \qquad \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$(*) \qquad \frac{x-x_0}{\ell} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

eq. cartesiane di una retta nello spazio.

per convenzione, in $(*)$ si ammette anche la possibilità che $0 \in \{\ell, m, n\}$.

In tale caso, ad esempio

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

si deve leggere come $x-x_0=0$

a sistema con $\dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$

NON È UNA DIVISIONE PER 0 e NEMMENO UN LIMITE! È SOLO UNA NOTAZIONE

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$$