prodotti scalari /prodotti scalari definiti positivi

$V(\mathbb{K})$ $V(\mathbb{R})$

Quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: prodotto scalare "sesquilineare"

$b(x,y) = \overline{b(y,x)}$ $\cancel{b(\alpha x + \beta y) =}$

$b(x,x) = \overline{b(x,x)} \in \mathbb{R}$

$(x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = \bar{x}_1 y_1 + \dots \bar{x}_n y_n$

$b(\alpha x + \beta y, z) =$

$= \bar{\alpha}\, b(x,z) + \bar{\beta}(y,z)$

$b(x, \alpha y + \beta z) =$

$\alpha\, b(x,y) + \beta b(x,z)$

proprietà dei prod. scalari def. positivi (Euclidei).

1) La matrice di cambiamento di base fra 2 basi ortonormali è una matrice ortogonale e quindi $A^T A = I$ cioè ${}^T A = A^{-1}$.

$\Rightarrow \det(A^T A) = 1$ e $\det(A) = \det({}^T A) \Rightarrow \det(A) \in \{-1, +1\}$.

- In particolare fare un cambiamento di base con una matrice ortogonale non cambia il det di una matrice assegnata per una forma bilineare.

$$\det(A^T B A) = \det(B)$$

- Per cambiamenti fra basi ortogonali l'eq. del cambiamento di base per funzioni lineari e forme bilineari è la stessa.

2) In generale se $A \subseteq V_n^0(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$\mathcal{L}(A) \dot{\oplus} A^{\perp} = V_n^0(\mathbb{R})$$

<u>DIM</u>: In generale abbiamo che $\dim A^{\perp} = n - \dim \mathcal{L}(A)$ se il prod. è ~~def~~ non degenere.

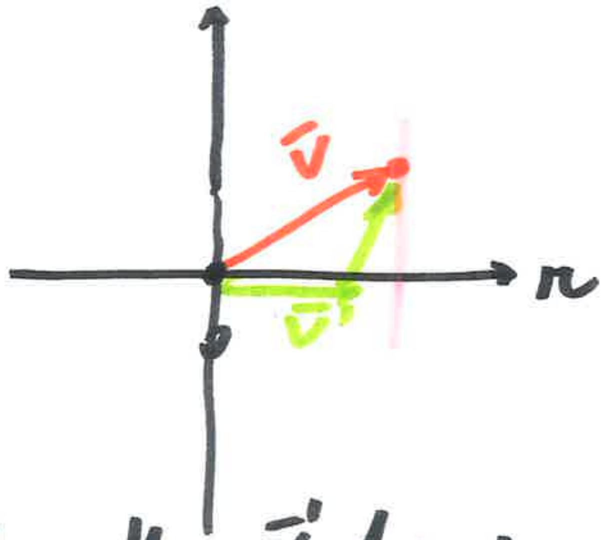
$A^{\perp} \cap \mathcal{L}(A) = \{\underline{0}\}$ non è immediato.

Sia $\bar{x} \in A^{\perp} \cap \mathcal{L}(A) \Rightarrow$ in particolare deve essere

$$\bar{x} \cdot \bar{x} = 0$$

$\Rightarrow$ per la definita positività $\|\bar{x}\| = 0$ e $\bar{x} = \underline{0}$ $\square$

$AX = B$



$V_1(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$

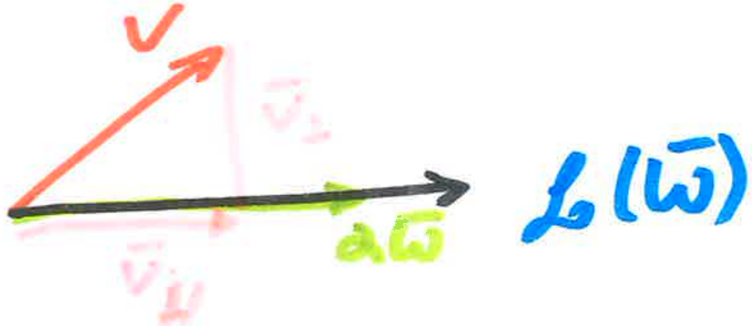
quale è il vettore $\bar{v}'$ che appartiene ad r tale che $\bar{v} - \bar{v}'$ abbia norma minima.

definiamo la distanza fra un vettore $\bar{v}$ ed un sottospazio W come $d(\bar{v}, W) =$

$$= \min_{\bar{v}' \in W} \|\bar{v} - \bar{v}'\|$$

Lemma: Sia $\bar{w} \neq \underline{0}$ un vettore in $V_n^\circ(\mathbb{R})$. Sia $\bar{v} \in V_n^\circ(\mathbb{R})$. Allora il vettore $\bar{x} = \bar{v} - \alpha\bar{w}$ tale che $\|\bar{v} - \alpha\bar{w}\|$ sia minimo al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ è $\bar{x} = \bar{v}_\perp$.

DIM



scriviamo $\boxed{\alpha\bar{w} = v_\parallel - \left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}} - \alpha\right)\bar{w}}$ (*)

$$v_\parallel = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\,\bar{w}$$

CALCOLIAMO

$$\|\bar{v}-\alpha\bar{w}\|^2 = \left\|\bar{v}-\bar{v}_{\parallel}+\left(\frac{v\cdot w}{w\cdot w}\right)\bar{w}-\alpha\bar{w}\right\|^2 =$$

$$= \left\|\bar{v}_{\perp}+\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}-\alpha\right)\bar{w}\right\|^2 =$$

$$= \left(\bar{v}_{\perp}+\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}-\alpha\right)\bar{w}\right)\cdot\left(\bar{v}_{\perp}+\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}-\alpha\right)\bar{w}\right)$$

$$= \|\bar{v}_{\perp}\|^2 + \left\|\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}-\alpha\right)\bar{w}\right\|^2 =$$

$$= \|\bar{v}_{\perp}\|^2 + \left|\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}-\alpha\right)\right| \|\bar{w}\|^2$$ è minimo

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}} \Rightarrow$ in particolare il

vettore $\bar{x}$ per cui $\bar{x}=\bar{v}-\alpha\bar{w}$ ha norma minima

è $\bar{v}^{\perp}$. $\square$

$$\alpha\bar{w} = \underbrace{\frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w}}_{\bar{v}_H} - \underbrace{\left(\frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}} - \alpha\right)\bar{w}}_{\text{differenza da } \bar{v}_H.}$$

più in generale.

<u>Teorema</u>: Sia $W \subseteq V_n^{\circ}(\mathbb{R})$ e sia $\bar{v} \in V_n^{\circ}(\mathbb{R})$

Allora il vettore $\bar{x}$ tale che

~~[illegible] con $\bar{w}$ ed [illegible]~~

~~$\bar{x}\perp$~~ $\bar{v} = \bar{x} + \bar{w}$ con $\bar{w} \in W$ ed $\bar{x}$ di norma minima è un vettore appartenente a $W^{\perp}$. Il vettore $\bar{w} = \bar{v} - \bar{x}$ è detto proiezione ortogonale di ~~$\bar{v}$~~ su W.

Sia $\mathcal{B}_W = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k)$ una base ortogonale di W.

consideriamo il vettore

$$\boxed{\bar{v}_{\parallel} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{e}_1}{\bar{e}_1\cdot\bar{e}_1}\bar{e}_1 + \frac{\bar{v}\cdot\bar{e}_2}{\bar{e}_2\cdot\bar{e}_2}\bar{e}_2 + \dots + \frac{\bar{v}\cdot\bar{e}_k}{\bar{e}_k\cdot\bar{e}_k}\bar{e}_k \in W}$$

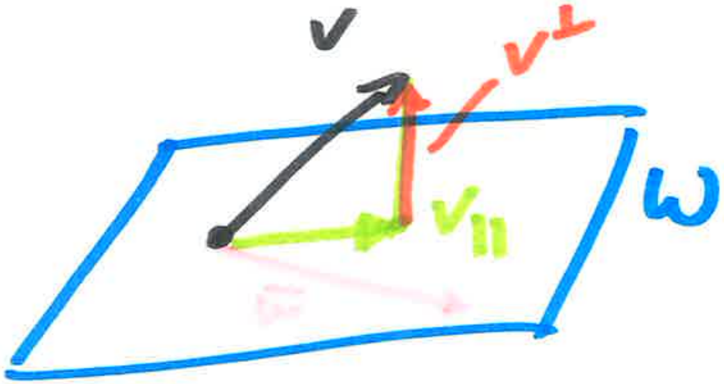
osserviamo che posto $\bar{v}_{\perp} = \bar{v} - \bar{v}_{\parallel}$ abbiamo

$$\bar{v}_{\perp}\cdot\bar{e}_i = \bar{v}\cdot\bar{e}_i - \bar{v}_{\parallel}\cdot\bar{e}_i = \bar{v}\cdot\bar{e}_i - \frac{\bar{v}\cdot\bar{e}_i}{\bar{e}_i\cdot\bar{e}_i}\bar{e}_i\cdot\bar{e}_i =$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \bar{v}_{\perp} \in W^{\perp}$.

$\blacksquare$



$\bar{v} = \bar{v}_{\parallel} + \bar{v}_{\perp}$
con $\bar{v}_{\perp} \in W^{\perp}$
e $\bar{v}_{\parallel} \in W$.

prendiamo poi $\bar{w} \in W$ e scriviamo $\bar{w} = \bar{v}_{\parallel} + \bar{w}'$
mostriamo che il vettore $\boxed{\bar{v} - \bar{w} = \bar{v} - \bar{v}_{\parallel} - \bar{w}'}$
é minimo se $\bar{w}' = \underline{0}$.
in norma.

$$\|\bar{v} - \bar{w}\|^2 = \|\bar{v} - \bar{v}_{\parallel} - \bar{w}'\|^2 = \|\bar{v}_{\perp} - \bar{w}'\|^2 =$$
$$= (\bar{v}_{\perp} - \bar{w}') \cdot (\bar{v}_{\perp} - \bar{w}') = \|\bar{v}_{\perp}\|^2 + \|\bar{w}'\|^2$$

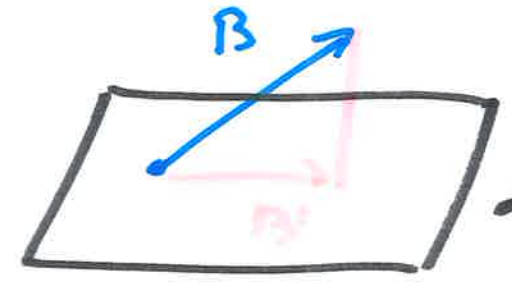
minimo $\Leftrightarrow \bar{w}' = \underline{0}$

$AX = B$

compatibile $\Rightarrow$ OK

non compatibile $\Rightarrow rk(A|B) \neq rk(A)$

$\Rightarrow B \in \mathcal{L}(C(A))$



$\mathcal{L}(C(A))$

prendiamo B' = proiezione ortogonale di B sulle colonne di A e proviamo a risolvere $AX = B'$

risolviamo il sistema lineare in cui B' è il "vettore più vicino a B" che rende il sist. compatibile.

$AX = B'$ in realtà è equivalente al sistema lineare $\,{}^{T}\!A\,A X = {}^{T}\!A\,B$

$${}^{T}\!A\,(AX - B) = \underline{0}$$

NOI PARTIAMO DA $AX = B$ $\qquad AX = B'$

vogliamo risolvere un sistema la cui soluzione y sia tale che

$$(Ay - B) \in \mathcal{L}(C(A))^{\perp}$$

perché $Ay = B'$ e $B - B'$ deve essere ortogonale ad una base di $\mathcal{L}(C(A))$

cosa vuol dire $(AY - B) \in \mathcal{L}(C(A))$?

vuol dire che $\forall i$ $\quad {}^{T}C_i \, (AY - B) = \underline{0}$

$$\Rightarrow \; {}^{T}A\,(AY - B) = \underline{0}$$

$$({}^{T}AA)\,Y = {}^{T}AB.$$

viceversa: se $({}^{T}AA)\,Y = {}^{T}AB \Rightarrow$ ogni soluzione di questo sistema soddisfa $AX = B'$ poiché $(B' - B)$ è il vettore ortogonale ad $\mathcal{L}(C(A))$ ed è univocamente determinato.

$\square$

$x+y=0$

$x+y=1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

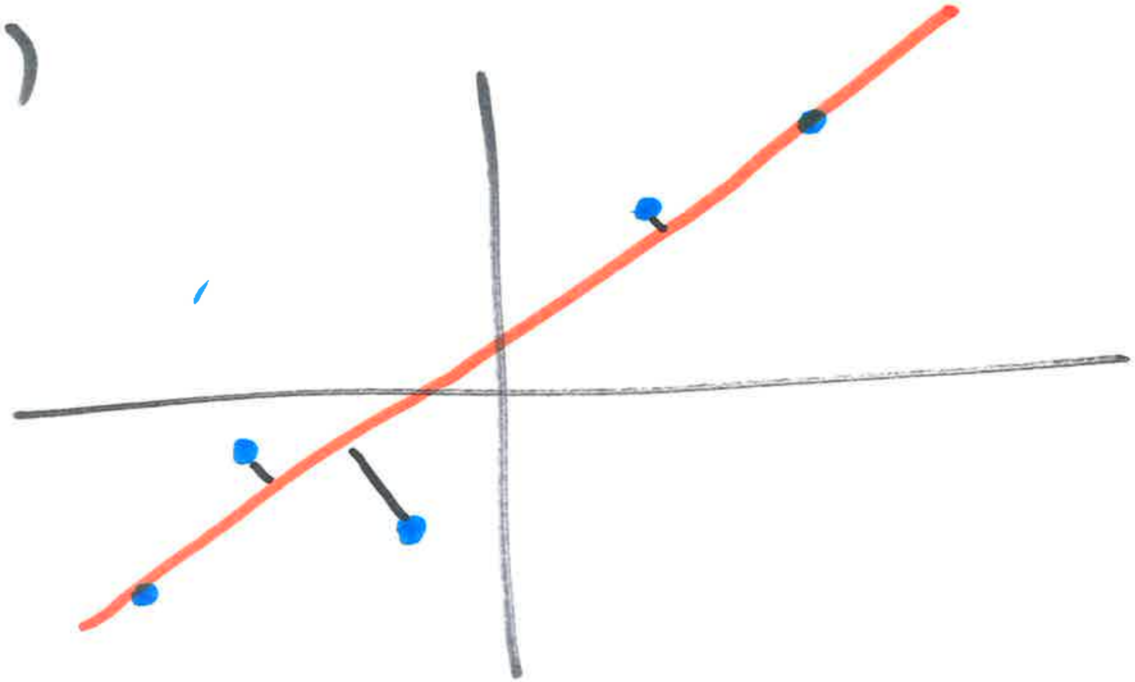
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$2(x+y)=1 \qquad x+y=\frac{1}{2}$

$\alpha(1,-1)+(\frac{1}{2},0)$

Applicazione: supponiamo di avere delle coppie di valori nel piano.

(x_i, y_i)



volete trovare la retta che meglio approssima la distribuzione data dei punti

$$y = ax + b$$

Impostiamo un sistema lineare in 2 incognite (a, b) e tante eq. quanti sono i punti:

$$\begin{aligned} a x_1 + b &= y_1 \\ a x_2 + b &= y_2 \\ &\vdots \\ a x_m + b &= y_m \end{aligned}$$

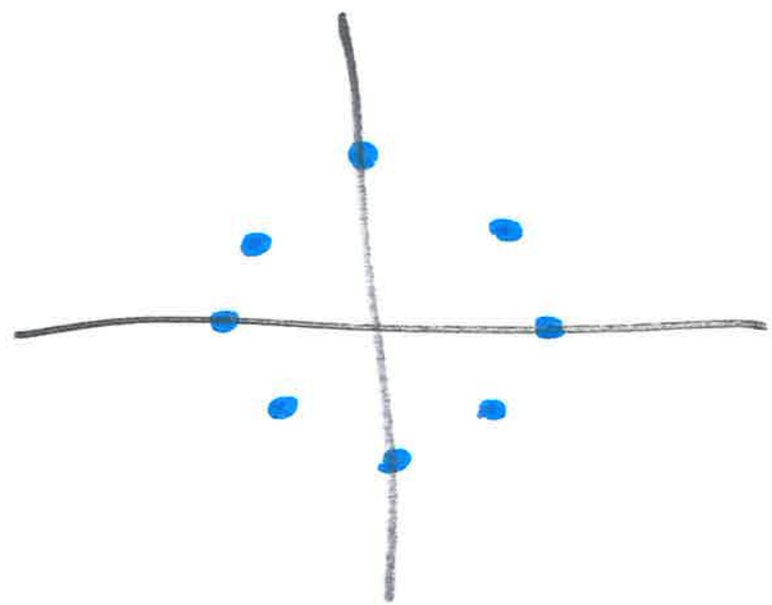
se compatibile $\Rightarrow$ $\forall$ punto sta sulla retta che trovate $\Rightarrow$ FINE :-)

altrimenti $\rightarrow$ considerate il sistema ai minimi quadrati: ${}^{t}AAX = {}^{t}AB$

e lo risolvete.

Si dimostra che la soluzione che si ottiene è la retta che minimizza lo scarto quadratico rispetto i dati assegnati

$$\sum d(r_0, P_i)^2$$



OSS: il metodo dei minimi quadrati si applica a $\| \|_2$ perché è legato alla ortogonalità.

Cosa succede se usiamo norme diverse.

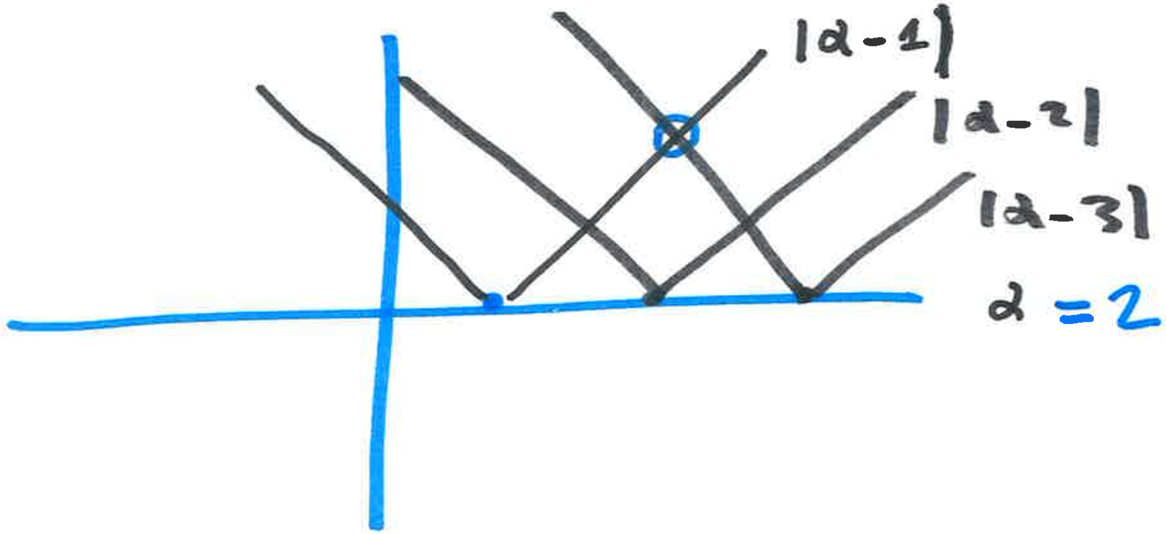
$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [x] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

MINIMI QUADRATI $\quad [1\ 1\ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x = [1\ 1\ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$3x = 6 \qquad x = 2$$

$\| \ \|_\infty$ dobbiamo trovare il vettore del tipo $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ tale che $\sup(|\alpha-1| + |\alpha-2| + |\alpha-3|)$ sia minimo

$$\boxed{\alpha = 2}$$


$|\alpha - 1|$
$|\alpha - 2|$
$|\alpha - 3|$
$\alpha = 2$