Sistemi lineari.

$AX=B$

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$ $\quad B \in \mathbb{K}^{m,1}$ vettore termini noti

$m = \#$ equazioni

$n = \#$ incognite

$X = {}^{T}(x_1, \dots x_n)$ vettore delle incognite.

→ Sistema compatibile $\Leftrightarrow$ $\rho(A) = \rho(A|B) = k$

ed in tale caso ∞^{n-k} soluzioni.

→ come risolvere i sistemi lineari.

Le soluzioni di un sistema lineare

$$AX = B$$

compatibile dipendono solamente dalla copertura lineare delle righe di $(A|B)$.

$\downarrow$

in particolare possiamo risolvere il sistema

$$A'X = B'$$

ove le righe di $(A'|B')$ sono una base dello spazio delle righe di $(A|B)$

ridurre il sistema $AX = B$ ad un sistema "principale equivalente" con un numero minimo di equazioni.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ \cancel{2x+2y-2z=2} \\ x+z=3 \\ \cancel{3x+3z=9} \\ \cancel{y-2z=-2} \end{cases}$$

3 incognite
5 equazioni

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+z=3 \end{cases}$$

3 incognite
2 equazioni

Teorema: Il sistema lineare $AX=B$ è equivalente al sistema

$$(*) \quad \begin{cases} AX+x_{n+1}B=\underline{0} \\ x_{n+1}=-1 \end{cases}$$

(*) lo posso riscrivere come

$$(A|B)\begin{bmatrix} X \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

ovvero

$$\begin{cases} (A|B)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = 0 \\ x_{n+1} = -1 \end{cases}$$

osservo che le soluzioni di $(A|B)\begin{bmatrix} X \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \underline{0}$

sono $\ker(A|B)$.

Se dimostro che $\ker(A|B)$ dipende solo dalla copertura lineare delle righe di

$(A|B)$

(tale spazio vett. è detto $\mathrm{coker}(A|B)$)

$\Rightarrow$ Abbiamo anche che le soluzioni di $AX=B$ dipendono solamente dalla copertura lineare di $(A|B)$.

$$S = \{X \mid AX=B\} = \{(x_1 \dots x_n) \mid (x_1 \dots x_{n+1}) \in \mathrm{Ker}(A|B) \ \& \ x_{n+1} = -1\}.$$

Lemma: Sia $M \in \mathbb{K}^{m,n+1}$ una matrice.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(M)$ dipende solamente da $\mathrm{coKer}(M)$.

ovvero $\mathrm{Ker}(M)$ è identificato dalla copertura lineare delle righe di M.

$$M = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

vettori riga

vettore delle incognite $\overline{X}$

$$\Rightarrow S \in Ker(M) \iff MS = \underline{0}$$

$$\begin{cases} R_1 S = 0 \\ R_2 S = 0 \\ \vdots \\ R_m S = 0 \end{cases}$$

~~se Bis~~. S soddisfa $R_i S = 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow \forall \alpha_1 \dots \alpha_m \in \mathbb{k}$

$$\left(\sum \alpha_i R_i\right) S = \sum \alpha_i (R_i S) = \sum \alpha_i \cdot 0$$
$$= 0.$$

quindi S soddisfa $\forall$ equazione che è c. lineare delle righe di M.

$S \in \operatorname{Ker}(M) \Rightarrow S \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L}(R_1 \dots R_m))$.

Viceversa supponiamo ~~che~~ $\forall R \in \mathcal{L}(R_1 \dots R_m)$ si abbia ~~~~ $RS = 0 \Rightarrow$ in particolare si ha $R_i S = 0 \quad \forall i \Rightarrow S \in \operatorname{Ker}(M)$

$\square$

Teorema: Le soluzioni di un sistema lineare compatibile $AX=B$ dipendono solo da $\mathrm{coker}(A|B)$ = copertura lineare delle righe di $(A|B)$.

CONSEGUENZA: Le soluzioni di $AX=B$ compatibile dipendono solamente da una sequenza libera di equazioni estratta da $(A|B)$.

- Sistema di Cramer.

Sia $AX=B$ un sistema lineare con $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ e $\det(A) \neq 0$ (quindi le righe di A sono un sistema libero)

$\Rightarrow \exists! \, X_0 \in \mathbb{K}^{n,1} : \quad AX_0 = B.$

<u>DIM:</u> $A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow X_0 = A^{-1}B$

inoltre se X_0, X_1 soluzioni $\Rightarrow$

$$AX_0 = B = AX_1 \Rightarrow X_0 = A^{-1}B = X_1$$

e quindi la soluzione è unica.

- Sistema principale:

Sia $AX = B$ un sistema lineare con $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

con $m \leq n$ e $\rho(A) = m$.

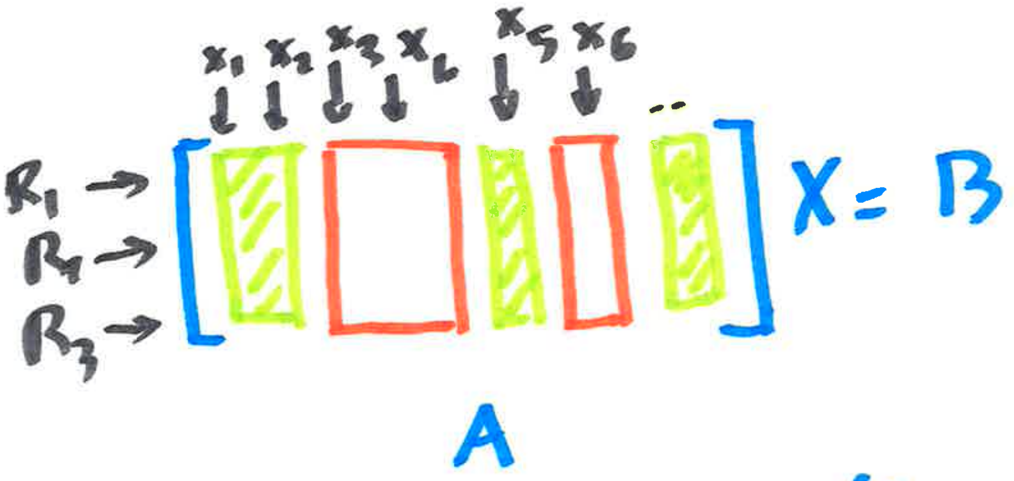
[si dice anche che il sistema ha rango pieno / la matrice A ha rango pieno/massimo]

<u>full rank</u>

NOTIAMO CHE $(A|B) \in \mathbb{K}^{m,n+1}$ in questo caso

ma $\rho(A|B) \leq \min(m, n+1) = m = \rho(A)$

quindi il sistema è compatibile per R/C.



poiché A ha rango m, essa contiene un minore m×m con det ≠ 0 chiamiamolo M

Consideriamo tutte le incognite che corrispondono a colonne <u>non</u> interessate da M come parametri e spostiamole a dx dell'uguale.

$$\underbrace{\left[\ \ \right]}_{M}\begin{bmatrix}x_3\\x_4\\x_6\end{bmatrix} = B - \underbrace{\left[\ \ \right]}_{M^c}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_5\\\vdots\end{bmatrix}$$

sono n − m = = n − rk(A) colonne.

risolvere il nuovo sistema

$$MX' = B - M^c X''$$

come un sistema di Cramer parametrico.

$$X' = M^{-1}(B - M^c X'')$$

osserviamo che le soluzioni dipendono dal numero giusto di parametri.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

M

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ y = 3 + z \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} z$$

$$\begin{cases} y = 3 + z \\ x = 1 - z - y = 1 - z - 3 - z = \\ \qquad = -2 - 2z \end{cases}$$

- $AX = B$ sistema lineare con $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ $B \in \mathbb{K}^{m,1}$.

In generale

1) si calcola $\rho(A)$ e $\rho(A|B)$
2) se $\rho(A) \neq \rho(A|B)$ $\Rightarrow$ sistema incompatibile $\Rightarrow$ FINE.
3) estraiamo una base di coker$(A|B)$ ovvero una seq. linearmente indip. di equazioni.

→ otteniamo un sistema

$$A'X = B'$$

con le stesse soluzioni di $AX = B$

ma $\rho(A') = \cancel{n}$ ed $A' \in \mathbb{K}^{\cancel{k},n}$.

e quindi possiamo risolverlo come prima.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ \quad\; y + z - t = 2 \\ x \qquad\;\; + 2t = 1 \end{cases} \qquad (A|B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$\rho(A) = \rho(A|B) = 2$

→ compat. ∞^2 sol.

Estraiamo una base di coker$(A|B)$ prendendo

solamente le righe intercettate dal
minore fondamentale.

$$(A'|B') = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

applichiamo il procedimento per sistemi
di rango massimo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix}$$

risolviamo con Cramer (per sostituzione,
etc).

$$y = 2 - z + t$$

$$x = 3 - z - t - y = 3 - \cancel{z} - t - 2 + \cancel{z} - t =$$

$$3-2t$$

Idea per risolvere sistemi lineari (GAUSS).

Manipolare le righe della matrice $(A|B)$ di modo da ottenere una ~~[illegible]~~ base di $\mathrm{coker}(A|B)$ da cui sia "ovvio" leggere la soluzione del sistema.

$$\begin{cases} x = f(\ldots) \\ y = f(\ldots) \\ \vdots \end{cases}$$

fra i parametri non compaiono le incognite.

<u>Def.</u>: Sia A una matrice $\in \mathbb{K}^{m,n}$.
Si dice che A è in forma ridotta a scalini per righe (RREF = Row Reduced echelon form) se:

1) per ogni riga di A la prima entrata $\neq 0$ vale 1.

2) Se una colonna contiene la prima entrata non nulla di una riga $\Rightarrow$ tale colonna contiene solamente quell'entrata $\neq 0$.

3) Se la prima entrata non nulla nella riga i è in posizione $K \Rightarrow$ la prima entrata non nulla in ogni riga $j > i$ sarà in posizione $> K$.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{RREF}$$

$\neq 0$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{NO RREF}$$

$\neq 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 10 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{NO RREF}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{NO RREF}$$

Supponiamo A in RREF. Allora 1) tutte le righe non nulle di A sono un sistema libero.

2) nelle colonne delle righe non nulle di A è possibile trovare una copia della matrice identica.

Supponiamo di avere $AX=B$ compatibile con

$$
(A|B) = \begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
\boxed{1} & 3 & \boxed{0} & 5 & \boxed{0} & 1 & 1 \\
\boxed{0} & 0 & \boxed{1} & 6 & \boxed{0} & 3 & 2 \\
\boxed{0} & 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & 5 & 7
\end{array}\right] \\
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\
 & & & A & & & B
\end{array}
\end{array}
$$

scelgo come incognite quelle corr. le colonne della matrice identica.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix}
$$

OTTENGO CHE le soluzioni del sistema

CORRISPONDONO a
$$x_1 = 1 - 3x_2 - 5x_4 - x_6$$
$$x_3 = 2 - 6x_4 - 3x_6$$
$$x_5 = 7 - 5x_6$$

Se vogliamo leggere direttamente le sol aggiungiamo le eq.
$$x_2 = x_2$$
$$x_4 = x_4$$
$$x_6 = x_6$$

Sol. particolare

base delle sol. del sist. omogeneo associato.

$$\begin{matrix} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \\ x_4 = \\ x_5 = \\ x_6 = \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Riduzione gaussiana.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

cerchiamo la prima entrata $\neq 0$ nella prima colonna.

Se è $a_{11} \neq 0 \rightarrow$ OK

~~altrimenti scambiamo la~~

se sono tutte $= 0 \Rightarrow$ passiamo alla colonna successiva.

ALTRIMENTI scambiamo la riga che contiene tale entrata con la prima.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\wr$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DIVIDIAMO LA PRIMA RIGA PER IL VALORE DELLA SUA PRIMA ENTRATA NON NULLA

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOTTRAIAMO AD OGNI RIGA $i \neq$ DALLA PRIMA LA PRIMA RIGA MOLTIPLICATA PER IL COEFF DELLA RIGA i nella colonna 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 17/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

STESSO DISCORSO SU II RIGA. → dividiamo per prima entrata $\neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5/2 & 7/2 & 9/2 \\ 0 & 17/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SOTTRAIAMO ALLA I RIGA $\frac{1}{3}$ la seconda
e ALLA III RIGA $\frac{17}{3}$ la seconda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/6 & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 5/2 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3}\cdot\frac{5}{2} & -\frac{17}{3}\cdot\frac{7}{2} & -\frac{17}{3}\cdot\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

STESSO DISCORSO SULLA III riga

DIVIDIAMO PER $-\frac{17}{3} \cdot \frac{5}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 5/2 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \text{—} & \text{—} \\ 0 & 1 & 0 & \text{—} & \text{—} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{9}{5} \end{array}\right]$$

forma ridotta.

Esercizio

$$\begin{cases} x+(k-1)y+z = k+1 \\ \qquad y - z + t = 1-k \\ x - y + (k+1)z + t = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & k-1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} k+1 \\ 1-k \end{matrix} \\ 1 \quad -1 & k+1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k-1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & k+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k-1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -k & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -k & k \end{vmatrix} = 0$$

$(k+1) - k = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -k & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -k & 1 \end{vmatrix} = 1+k$$

se $k \neq -1$ è diverso da 0.

$k \neq -1 \Rightarrow \rho(A) = 3 = \rho(A|B)$ sistema compatibile con $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k-1 & 1 & 0 & k+1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1-k \\ 1 & -1 & k+1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x+(k-1)y &= (k+1)-z \\ y+t &= (1-k)+z \\ x-y+t &= 1-(k+1)z \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = (1-k) + z - t \\ x + (k-1)\left[(1-k) + z - t\right] = (k+1) - z \\ x - \left[(1-k) + z - t\right] + t = 1 - (k+1)z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - (k-1)t = (k+1) - z + (k^2-1) - (k-1)z \\ x + 2t = 1 - (k+1)z + z + (1-k) \\ y = (1-k) + z - t \end{cases}$$

$$x = \underbrace{(k+1) - z + (k^2-1) - (k-1)z + (k-1)t}_{+2t \, =}$$

$$2t+(k+1)-z+(k^2-1)-(k-1)z+(k-1)t =$$

$$= 1-(k+1)z+z+(1-k)$$

ricavare t (semplificando le espressioni)

e poi sostituendo x ed y.

tutto in funzione di $k \neq -1$ e $z \in \mathbb{R}$.

$k=1$ la matrice $A|B$ diventa

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A

$\det M \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

per $k=-1$ $\quad \rho(A)=2 \quad \rho(A|B)=3$

quindi il sistema è incompatibile.

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 0 & k+1 \\ 1-k & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & k & 2 \end{array}\right)$$

$\rho(A) \geq 2 \ \forall k$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 1-k & 0 & 2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} =$$

$$= k \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 1 & k \end{vmatrix} =$$

$$-2k - (k - k^2) + 2 =$$

$= k^2 - 3k + 2$

Soluzioni $\quad k = 1$ oppure $k = 2$

$k \neq +1$ e $k \neq 2 \quad \exists!$ soluzione.

$k=1 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$

$\rho(A|B) = 3$

<u>NON COMPATIBILE</u>

$k=2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$

$\rho(A|B) = 2 = \rho(A)$

Il sistema:

- $k \neq 1,2$ ammette una ed una sola soluzione.
- $k = 1$ non ammette soluzione $(\rho(A)=2;\ \rho(A|B)=3)$
- $k = +2$ ammette $\infty^{3-2} = \infty^{1}$ soluzioni $(\rho(A)=2=\rho(A|B))$.

RISOLVIAMO PER $k = +2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = 1 - 4z \end{cases}$$

$$(1\ 1\ 0) + \mathcal{L}((2,-4,1))$$

sol particolare

soluzioni omogeneo.