Metodo per vedere se dei vettori sono l. indip.

$(\bar{v}_1, \dots \bar{v}_k) \in V_n(\mathbb{K})$ $\qquad \mathcal{B} = (\bar{e}_1, \dots \bar{e}_n)$

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\bar{v}_1) = (v_{11} \dots v_{1n})$$
$$\Phi_{\mathcal{B}}(\bar{v}_2) = (v_{21} \dots v_{2n}) \qquad A = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & & \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{bmatrix}$$
$$\vdots$$
$$\Phi_{\mathcal{B}}(\bar{v}_k) = (v_{k1} \dots v_{kn}).$$

$\Rightarrow (\bar{v}_1, \dots \bar{v}_n)$ sono l. indip.

$\iff$ A contiene un minore M di ordine k con $\det(M) \neq 0$.

$\bar{v} = \nearrow$ $\quad \bar{w} = \nearrow$

$B = (\rightarrow, \uparrow)$

$\Phi_B(\bar{v}) = (2,2)$ $\qquad \bar{v} = 2 \rightarrow + 2 \nearrow$

$\Phi_B(\bar{w}) = (\frac{5}{2}, 2)$ $\qquad \bar{w} = \frac{5}{2} \rightarrow + 2 \nearrow$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ \frac{5}{2} & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \neq 0$$

son indip.

Def: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Si dice che la matrice A ha **rango** k se A contiene un minore M $k \times k$ con $\det(M) \neq 0$ ed ogni minore $(k+1) \times (k+1)$ contenuto in A ha $\det = 0$.

Se non $\exists$ un minore **non singolare** (i.e. con $\det \neq 0$) contenuto in A $\Rightarrow$ si dice che A ha rango 0.

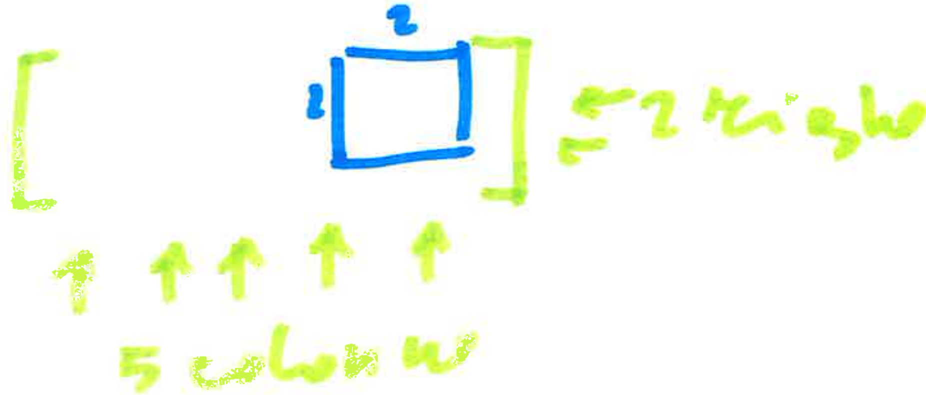
rho

$$\text{rango}(A) = \text{rk}(A) = \rho(A) = \text{rank}(A)$$

i.e. = id est = cioè

OSS $\rho(A) \leq \min(m,n)$. Se $\rho(A) = \min(m,n) \Rightarrow$ si dice che A ha **rango pieno**

(= rango massimo = full rank).



1) il rango è (relativamente) facile da calcolare.

2) il rango è legato alla nozione di dimensione.

Teorema (di Kronecker). Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$.

Indichiamo con $R(A) \subseteq \mathbb{K}^n$ l'insieme di tutte le righe di A e con $C(A) \subseteq \mathbb{K}^m$ l'insieme di tutte le colonne di A.

Allora $\rho(A) = \dim \mathcal{L}(R(A)) = \dim \mathcal{L}(C(A))$.

[Il rango di A coincide con la dim dello spazio vettoriale generato dalle sue righe e con la dim. dello spazio vettoriale generato dalle sue colonne.]

<u>DIM</u>: Innanzi tutto osserviamo che $\forall$ matrice M ~~se tale~~ $M \in \mathbb{K}^{k,k}$ si ha $\det(M) = \det({}^TM)$

quindi qualsiasi proprietà del rango che vale per $R(A)$ vale anche per $C(A)$ perché

$R(A) = C({}^TA)$ e $C(A) = R({}^TA) \Rightarrow \rho(A) = \rho({}^TA)$.

IN DETTAGLIO: se A contiene un minore M non sing. di ordine $k \Leftrightarrow {}^TA$ contiene il minore

${}^TM$ non singolare di ordine k,
e se ogni minore M' di ordine $(k+1)\times(k+1)$ di A ha $\det = 0 \iff$ ogni minore ${}^TM'$ di ${}^TA$ ha $\det \neq 0$.

Mostriamo che $\dim \mathcal{L}(R(A)) = \rho(A)$.

- Supponiamo $\rho(A) = k \Rightarrow \exists$ un minore M di dimensione $k \times k$ contenuto in A con $\det(M) \neq 0$.

Sia A' la sottomatrice di A formata dalle sole righe che intersecano $M \Rightarrow A' \in \mathbb{K}^{k,n}$ e contiene un minore $k \times k$ non singolare $\Rightarrow$ le righe di A' sono un sistema libero $\Rightarrow$

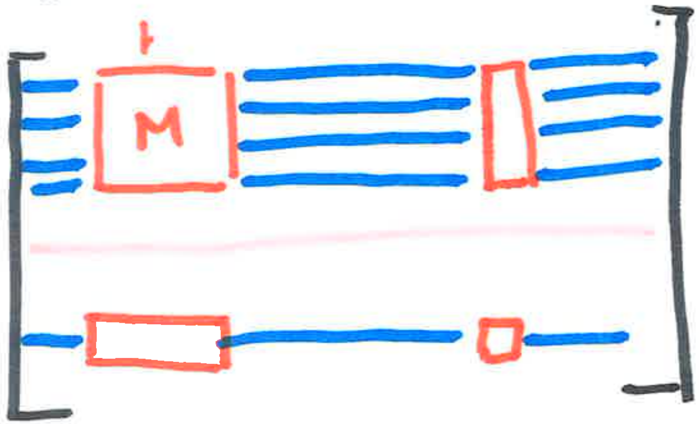
$\Rightarrow \dim \mathcal{L}(R(A')) = K$ e quindi

$$\dim \mathcal{L}(R(A)) \geq \dim \mathcal{L}(R(A')) = K.$$

se per assurdo $\dim \mathcal{L}(R(A)) > K \Rightarrow$ esiste fra le righe di A almeno una seq. di $K+1$ vettori linearmente indipendenti.
possiamo usare il teorema di completamento della base per aggiungere uno di questi vettori ad $R(A')$. Sia A'' la matrice che ha come righe queste $K+1$ righe indipendenti $\Rightarrow \exists$ un minore $(K+1)\times(K+1)$ di A'' con $\det \neq 0$ ma tale minore è anche un minore di $A \Rightarrow$ ↯ ASSURDO perché

A ha rango k.

A =



$\square = M \in \mathbb{K}^{k,k}$.

$[\equiv] = A'$

le k righe di A' sono lin. indip.

$\Rightarrow \dim \mathcal{L}(R(A)) \geq \dim \mathcal{L}(R(A')) = k$.

— = riga aggiunta in A''

↓

per assurdo ∃ se $\dim \mathcal{L}(R(A)) > \dim \mathcal{L}(R(A'))$.

A'' = righe di A' + riga aggiunta] deve avere rango k+1

↓

ASSURDO PERCHÉ $\rho(A) = k$ ed A'' é una sottomatrice di A.

$\rho(A) = k \Rightarrow \dim \mathcal{L}(R(A)) = k$

viceversa: supponiamo $\dim \mathcal{L}(R(A)) = k$

$\Rightarrow$ A contiene k righe l. indip $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ posto A' la matrice che contiene tali righe si vede che A' contiene un minore M' con $M' \in \mathbb{K}^{k,k}$ e $\det(M') \neq 0 \Rightarrow \rho(A) \geq k$.

D'altro canto se fosse $\rho(A) > k \Rightarrow \rho(A) \geq k+1$ ed esisterebbe in A un minore $M'' \in \mathbb{K}^{k+1,k+1}$ con $\det(M'') \neq 0 \Rightarrow$ le righe di A intercettate da M'' sono libere $\Rightarrow \dim \mathcal{L}(R(A)) \geq k+1$

$\lightning$ ASSURDO $\Rightarrow \rho(A) = k$

$\square$

Esempio

$$\begin{bmatrix} \boxed{1\ 2} & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2\ 4 & 0 & 2 & 6 & 0 & 2 \\ \boxed{1\ 1} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2\ 3 & 0 & 1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{4,7}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\dim \mathcal{L}(R(A)) \geq 2$$

minori 3x3 possibili: $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3}$

$$\frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 4 \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

In quanti modi ordinati posso scegliere k elementi da un insieme di n: $\quad n$

1° elemento n possibilità

2° elemento $n-1$ possibilità

$\vdots$

k esimo elemento: $(n-k+1)$ possibilità

$\Rightarrow$ TOTALE $n(n-1)\dots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

il numero di possibili disposizioni dei k elementi che abbiamo selezionato è $k!$

$\Rightarrow$ TOTALE POSSIBILI SCELTE NON ORDINATE

$$\frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

In realtà basta considerare i minori 3x3 che contengono il nostro minore 2x2

Invece che $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3}$ minori possiamo ragionare su $5 \cdot 2 = 10$ minori.

$$\begin{vmatrix} 1&2&0 \\ 2&4&0 \\ 1&1&0 \end{vmatrix} = 0 \qquad 0 = \begin{vmatrix} 1&2&1 \\ 2&4&2 \\ 1&1&0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1&2&1 \\ 1&1&0 \\ 2&3&1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1&2&3 \\ 2&4&6 \\ 1&1&1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1&2&3 \\ 1&1&1 \\ 2&3&4 \end{vmatrix} = 0$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1&2&0 \\ 1&1&0 \\ 2&3&0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1&2&0 \\ 2&4&0 \\ 1&1&1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 0 = \begin{vmatrix} 1&2&0 \\ 1&1&1 \\ 2&3&1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1&2&1 \\ 2&4&2 \\ 1&1&1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1&2&1 \\ 1&1&1 \\ 2&3&2 \end{vmatrix} = 0$$

$\rho(A) = 2$

In particolare una base di $\mathcal{L}(R(A))$ è data da

$\mathcal{B}_R = ((1\,2\,0\,1\,3\,0\,1), (1\,1\,0\,0\,1\,1\,1)) \subseteq \mathbb{K}^7$

Abbiamo anche che $\dim \mathcal{L}(C(A)) = 2$ ed una base di $\mathcal{L}(C(A))$ è data dalle colonne intercettate dal minore 2×2 con $\det \neq 0$

$$\mathcal{B}_C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \subseteq \mathbb{K}^4$$

N.B. $\mathcal{L}(C(A)) \neq \mathcal{L}(R(A))$

Si calcoli la dimensione di

$\mathcal{L}(R_K)$ ove $R_K = ((1\,k\,0), (1\,1\,1), (0\,0\,1))$

al variare di k.

$\Rightarrow$ METTIAMO I VETTORI A MATRICE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & K & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim \mathcal{L}(R_K) = 3 \iff \rho(A) = 3 \iff \det(A) \neq 0.$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - k.$$

Se $K \neq 1 \Rightarrow \dim \mathcal{L}(R_K) = 3$

Se $k=1 \Rightarrow \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\varrho(A_1)=2$

$\Rightarrow \dim \mathcal{L}(R_k)=2$ $\square$

COROLLARIO: Siano $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k \in V_n(\mathbb{K})$ dei vettori e $\mathcal{B}=(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base.

Allora $\dim \mathcal{L}(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k) = \varrho(A)$ ove A è la matrice che ha come righe (colonne) le componenti dei vettori $\bar{v}_i$ rispetto a $\mathcal{B}$.

Def: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $M \in \mathbb{K}^{k,k}$ un minore quadrato di A di ordine k. Si dice <u>orlato</u> di M ogni minore $(k+1)\times(k+1)$ di A che contiene M.

Teorema (degli orlati). Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Allora $\rho(A)=k \iff \exists$ un minore $M \in \mathbb{K}^{k,k}$ di ordine k di A con $\det(M)\neq 0$ ed ogni orlato di M ha $\det = 0$.

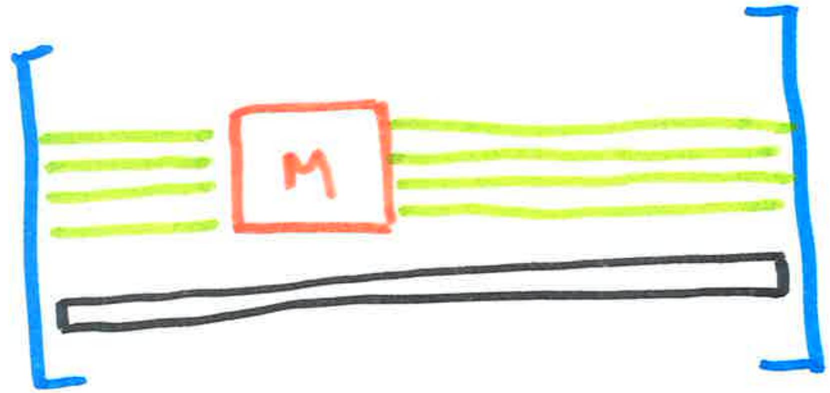
DIM Se $\rho(A)=k$ per definizione $\forall$ minore $(k+1)\times(k+1)$ ha $\det = 0$ $\Rightarrow$ in particolare tutti i minori che contengono M $\Rightarrow$ FINE.

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ ed M un minore $k \times k$ tale che tutti i suoi orlati abbiano $\det = 0$ e $\det(M) \neq 0$.

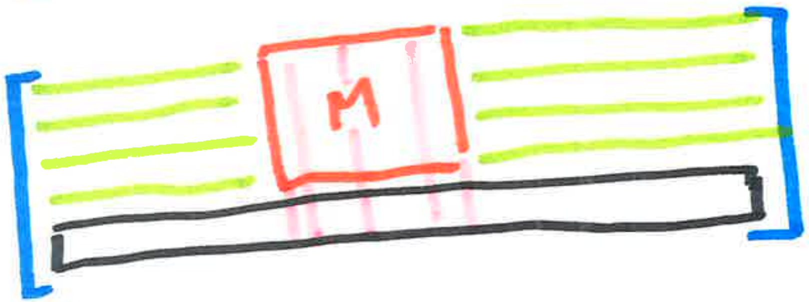
Mostriamo che deve essere $\rho(A) = k$.

Supponiamo per assurdo $\rho(A) \geq k+1 > k$ e consideriamo l'insieme delle righe di A intersecate da M $\Rightarrow$ questo è un insieme di k righe linearmente indip. ma $\rho(A) \geq k+1$ $\Rightarrow \dim \mathcal{L}(R(A)) \geq k+1 \Rightarrow$ esiste almeno una altra riga di A indip. rispetto le righe che contengono M.

Sia A' la matrice ottenuta da quella che contiene le righe di M aggiungendo tale riga. $A' \in \mathbb{K}^{k+1,n}$.



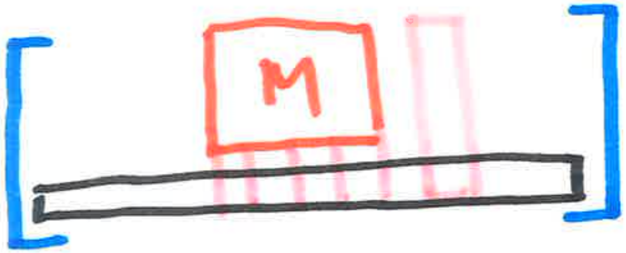
$= A \in \mathbb{K}^{m,n}$



$= A' \in \mathbb{K}^{k+1,n}$

<u>OSS</u>: $\dim \mathcal{L}(R(A')) = k+1 = \dim \mathcal{L}(C(A'))$.

Ragioniamo sulle colonne di A'. Ce ne sono $k+1$ indip. Le colonne intercettate da M sono un sistema libero di k colonne. Con il teorema di completamento della base possiamo agg. ad esse un'altra colonna indip.



$= A' \in \mathbb{K}^{k+1,n} \rightarrow$

osserviamo che il minore M' di A' ottenuto aggiungendo tale colonna ad M è $(k+1) \times (k+1)$ ed ha come colonne un insieme libero di vettori $\Rightarrow \det(M') \neq 0$ ed esiste un orlato di M con $\det \neq 0 \Rightarrow$ $\lightning$

ASSURDO PERCHÉ $\forall$ orlato di M ha $\det = 0$

$\square$

COME CALCOLARE IL RANGO DI UNA MATRICE A.

1) con il teorema degli orlati.

1) $r \leftarrow 0$ ~~[illegible]~~
$M \leftarrow \emptyset$

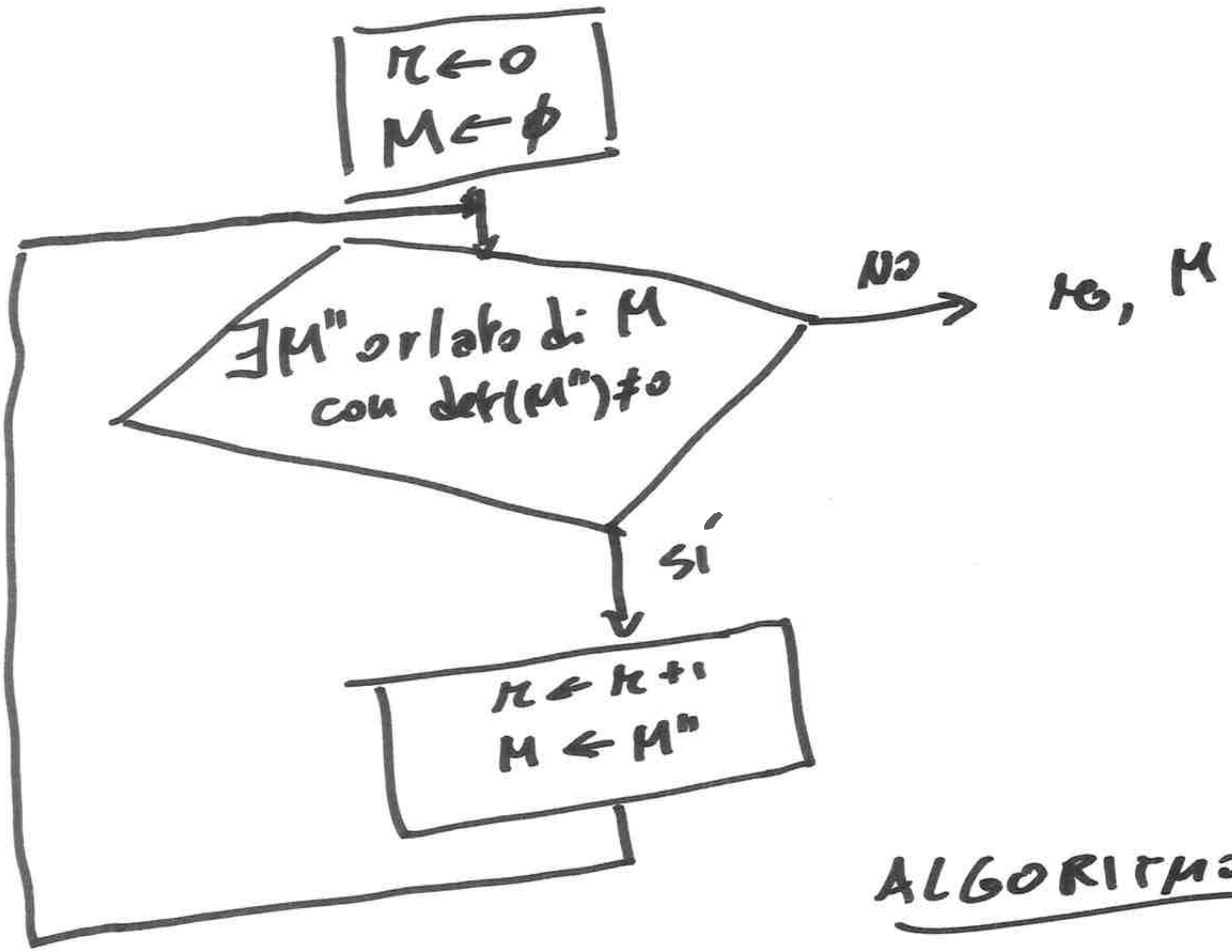
2) cerchiamo un minore M' $(r+1)\times(r+1)$ che contiene M e tale che $\det(M') \neq 0$

↓

se esiste $\Rightarrow$ $M \leftarrow M'$; $r \leftarrow r+1$ e torniamo al punto 2

altrimenti $\Rightarrow$ restituiamo M ed r.

M é detto minore fondamentale e r é ~~detto~~ il rango di A.



$r \leftarrow 0$
$M \leftarrow \phi$
$\exists M''$ orlato di M con $\det(M'') \neq 0$
NO
r, M
SÍ
$r \leftarrow r+1$
$M \leftarrow M''$

ALGORITMO

<u>N.B.</u>: Quando dico che una matrice A contiene un minore B formalmente intendo che B é ottenibile da A cancellando un certo numero di righe o colonne di A.

In altre parole B è una "sotto tabella" di A.

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{3} & 4 \\ 3 & \boxed{5} & \boxed{6} & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ OK} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & \boxed{4} \\ 3 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & \boxed{3} \end{bmatrix} \text{ OK}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & \boxed{4} \\ 3 & 5 & 6 & \boxed{7} \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \underline{\text{NO}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

calcolare $\rho(A)$ al variare di k.

$M_1 = ((1))$ $\det M_1 \neq 0 \Rightarrow \rho(A) \geq 1$

$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det M_2 \neq 0 \Rightarrow \rho(A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\rho(A) = 3$ se almeno uno dei 4 det. di cui sopra è $\neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow \rho(A) = 3. \quad \forall k$

Siano ora $\mathcal{U}, W \leq V_n(\mathbb{K})$.

Abbiamo definito $\mathcal{U} + W = \{\bar{u} + \bar{w} \mid \bar{u} \in \mathcal{U}, \bar{w} \in W\}$.

e dimostrato che $\mathcal{U} + W = \mathcal{L}(\mathcal{U} \cup W)$

In particolare se $\mathcal{B}_U$ = base di $\mathcal{U}$

$\mathcal{B}_W$ = base di W.

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W) = \mathcal{U} + W$$

in quanto $\mathcal{L}(\mathcal{B}_U) = \mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W)$

$\mathcal{L}(\mathcal{B}_W) = W \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W)$

ed ovviamente

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W) \subseteq \mathcal{L}(U \cup W) = U + W.$$

Calcolare $\dim(U+W)$ se conosciamo $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_W$ è fattibile. Mettiamo a matrice le componenti di tutti i vettori di $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ e poi calcoliamo il rango.

$$U_k = \mathcal{L}((1\ k\ 0\ 0), (0\ 0\ 1\ 1))$$

$$W = \mathcal{L}((1\ 1\ 0\ 0), (0\ {-1}\ 1\ 0))$$

calcolare $\dim U_k + W$ al variare di k.

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$\rho(A) \geq 2$

$\rho(A) \geq 3$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 0 \text{ se } k = 1 \\ \neq 0 \text{ se } k \neq 1 \end{matrix}$$

RISPOSTA: $\dim(U_k + W) = 3$ se $k = 1$

$\dim(U_k + W) = 4$ se $k \neq 1$

se $k \neq 1 \Rightarrow B_U \cup B_W$ è una base per $U_k + W$

se $k = 1 \Rightarrow B_U \cup B_W$ è legata.

__OSS:__ In generale se $U, W \leq V(\mathbb{K})$ e $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W$ sono basi di U e W rispettivamente allora $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è un sistema di generatori per $U+W$ ma non è detto sia libero.

__Def:__ Siano $U, W \leq V(\mathbb{K})$ si dice che la somma $U+W$ è __diretta__ e si scrive $U \oplus W$ se ogni vettore di $U+W$ si scrive in modo unico come somma di un vettore di U ed un vettore di W

$$\left[\, \mathcal{U} \oplus W \iff \forall \bar{s} \in \mathcal{U} + W \ \exists! \ (\bar{u}, \bar{w}) \in \mathcal{U} \times W : \ \bar{s} = \bar{u} + \bar{w}. \,\right]$$

in simboli.

(la somma é diretta $\iff \mathcal{U} + W \cong \mathcal{U} \times W$)

proposizione: Se $\mathcal{U} \oplus W \Rightarrow \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è una base della somma.

(basta far vedere che $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è libera; infatti già sappiamo che è di generatori).

<u>DIM</u>: Sia $\mathcal{B}_U = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_m)$, $\mathcal{B}_W = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_k)$

e supponiamo $\exists \ (\alpha_1 \dots \alpha_m \beta_1 \dots \beta_k) \neq \underline{0}$

con $\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_m \bar{e}_m + \beta_1 \bar{e}'_1 + \dots + \beta_k \bar{e}'_k = \underline{0}$

$\Rightarrow \underline{0} \in \mathcal{U}+W$ ma $\underline{0}$ si scrive in modo unico come $\underline{0} \in \mathcal{U} + \underline{0} \in W$

$\Rightarrow \quad \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_m \bar{e}_m = \underline{0} \in \mathcal{U}$

$\beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_k \bar{e}_k = \underline{0} \in W$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$

$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$ $\square$

(dipende anche dal teorema che segue).

Teorema: $\mathcal{U} \oplus W \Leftrightarrow \mathcal{U} \cap W = \{\underline{0}\}$.

N.B: Se $\mathcal{U} \oplus W \Rightarrow \boxed{\dim \mathcal{U} \oplus W} = \dim \mathcal{U} + \dim W$

per quanto visto sopra

$= \dim \mathcal{U} + \dim W - 0 =$

$$= \dim \mathcal{U} + \dim W - \dim \{\underline{0}\} =$$

$$\boxed{= \dim \mathcal{U} + \dim W - \dim (\mathcal{U} \cap W)}$$

In questo caso, per il teorema che dobbiamo dimostrare.

<u>DIM</u> Teorema.

Hp: $\mathcal{U} \oplus W$ -

Ts: $\mathcal{U} \cap W = \{\underline{0}\}$.

Supponiamo $\exists\, \bar{x} \in \mathcal{U} \cap W$ con $\bar{x} \neq \underline{0}$

$\Rightarrow \forall\, \bar{s} \in \mathcal{U} \oplus W \quad \exists!\, (\bar{u}_1, \bar{w}_1) \in \mathcal{U} \times W$ con

$$\bar{s} = \bar{u}_1 + \bar{w}_1 = (\bar{u}_1 + \bar{x}) + (\bar{w}_1 - \bar{x}).$$

se $\bar{x} \in \mathcal{U} \cap W \Rightarrow \bar{u}_1 + \bar{x} \in \mathcal{U}, \ \bar{w}_1 - \bar{x} \in W$

e se $\bar{x} \neq \underline{0} \quad \bar{u}_1 + \bar{x} \neq \bar{u}_1, \ \bar{w}_1 - \bar{x} \neq \bar{w}_1$

ma allora

$\bar{s}$ si scrive in almeno 2

modi come somma di un vettore di U

e di un vettore di W. $\Rightarrow \bar{x} = \underline{0}$

Hp: $U \cap W = \{\underline{0}\}$

Ts: $U \oplus W$.

Supponiamo $\exists\, \bar{s} \in U + W$ con

$$\bar{s} = \bar{u}_1 + \bar{w}_1 = \bar{u}_2 + \bar{w}_2$$

con $(\bar{u}_1, \bar{w}_1) \neq (\bar{u}_2, \bar{w}_2)$

$$\Rightarrow \bar{u}_1 + \bar{w}_1 = \bar{u}_2 + \bar{w}_2 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}_{\in U} = \bar{w}_2 - \bar{w}_1 \in W$$

ed $\bar{u}_1 - \bar{u}_2 \neq \underline{0} \Rightarrow \bar{u}_1 - \bar{u}_2 = \bar{w}_2 - \bar{w}_1 \in U \cap W$

$\Rightarrow$ ASSURDO perché $U \cap W = \{\underline{0}\}$ $\square$

La somma $U \oplus W$ è diretta se e solamente se $U \cap W = \{0\}$ è banale.

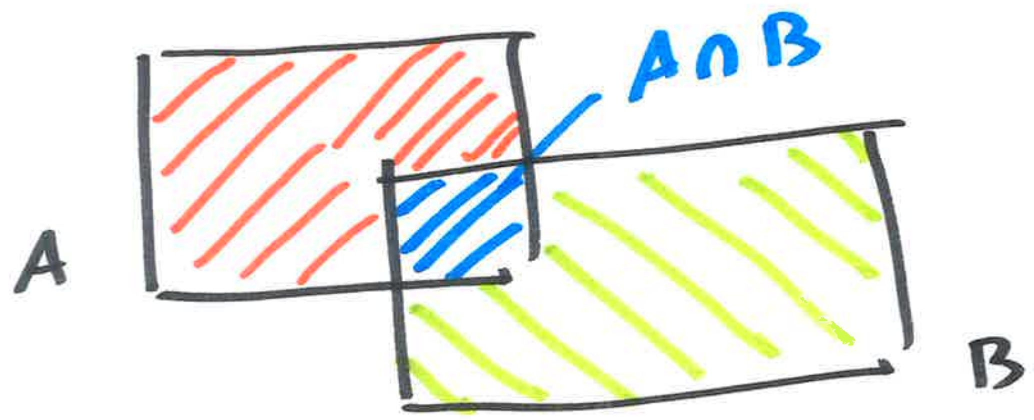
Teorema (formula di Graßmann)

$$\dim U + \dim W - \dim U \cap W = \dim(U + W).$$

La formula di Graßmann richiama il cosiddetto principio di inclusione/esclusione.

Siano A, B due insiemi $\Rightarrow$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



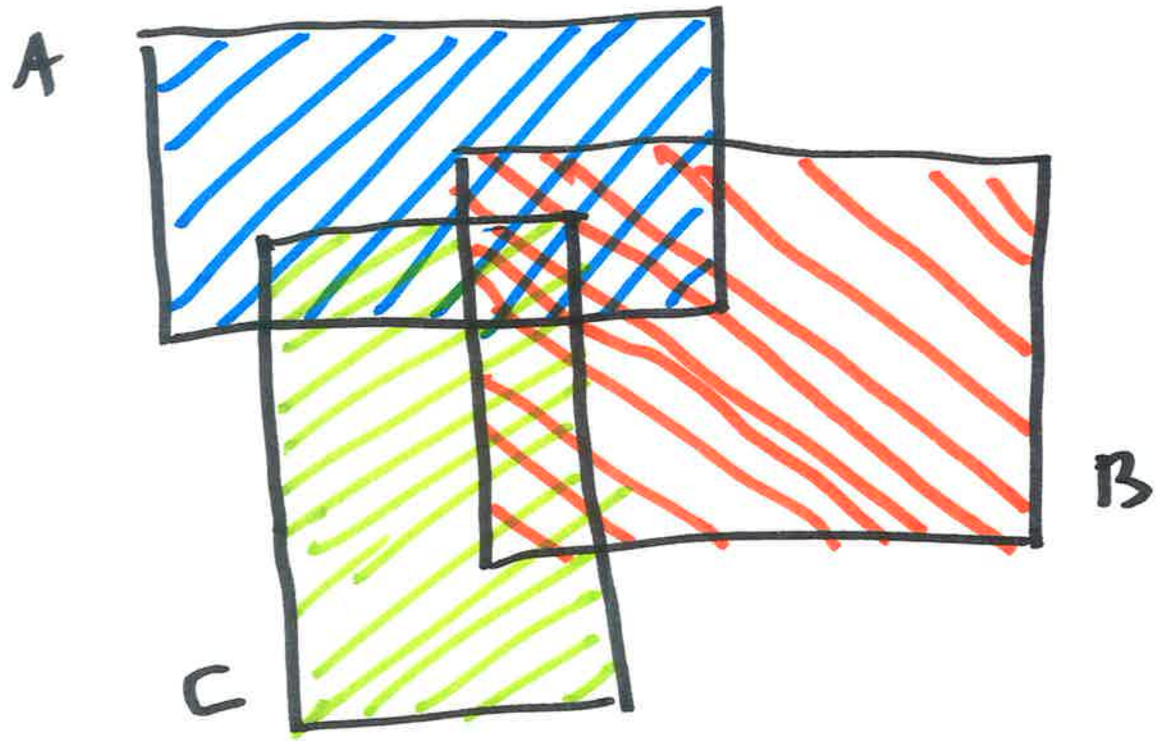
$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B|$$

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

$$|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B| = |A \cap B| + |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B|$$

$$= |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

$$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B-C| = |A\cup B\cup C|-|A\cap B\cap C|$$