⌜ La lezione del 10/10/2023
è preliminare a quella del 9/10 ⌟

Legami fra sequenze di generatori e sequenze libere.

→ Metodo degli scarti successivi:

ALGORITMO: Data una sequenza finita di generatori per uno s. vett f.g produce $\emptyset$ oppure una sottoseq. libera di generatori.

S è di generatori se $S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ ed ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ si scrive come c. lineare di un numero finito di elementi di S.

$$V = \mathcal{L}(S).$$

$V(\mathbb{K})$ finitamente generato (f.g.) se $\exists$ S con $|S| < \infty$ tale che $V = \mathcal{L}(S)$.

<u>Lemma</u>: Sia $S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ una sequenza di generatori per uno s. vettoriale W legata.
Allora $\exists$ $\bar{v}_i \in S$ tale che $S \setminus \{\bar{v}_i\}$ genera W.

["possiamo sempre scartare almeno un vettore da S ed otteniamo ancora una seq. di generatori se S è legata"]

DIM S legata $\Rightarrow \exists$ ~~una~~ $\bar{v}_i \in S$ tale che

$$\bar{v}_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{v}_j$$

$\bar{v}_i$ è combin. lineare dei rimanenti vettori di S.

Sia $\bar{w} \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow \exists \beta_j \quad j = 1 \dots n$ tali che

$$\bar{w} = \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_i \bar{v}_i + \dots + \beta_n \bar{v}_n =$$

$$= \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_i \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{v}_j + \dots + \beta_n \bar{v}_n =$$

$$= (\beta_1 + \beta_i \alpha_1) \bar{v}_1 + \dots + (\beta_{i-1} + \beta_i \alpha_{i-1}) \bar{v}_{i-1} +$$

$$+ (\beta_{i+1} + \beta_i \alpha_{i+1}) \bar{v}_{i+1} + \dots + (\beta_n + \beta_i \alpha_n) \bar{v}_n$$

$=$

$$= \sum_{j \neq i} (\beta_j + \beta_i \alpha_j)\bar{v}_j$$

$\Rightarrow \bar{w}$ è comb. lineare di ~~?~~ un numero finito di vettori di $S \setminus \{\bar{v}_i\}$.

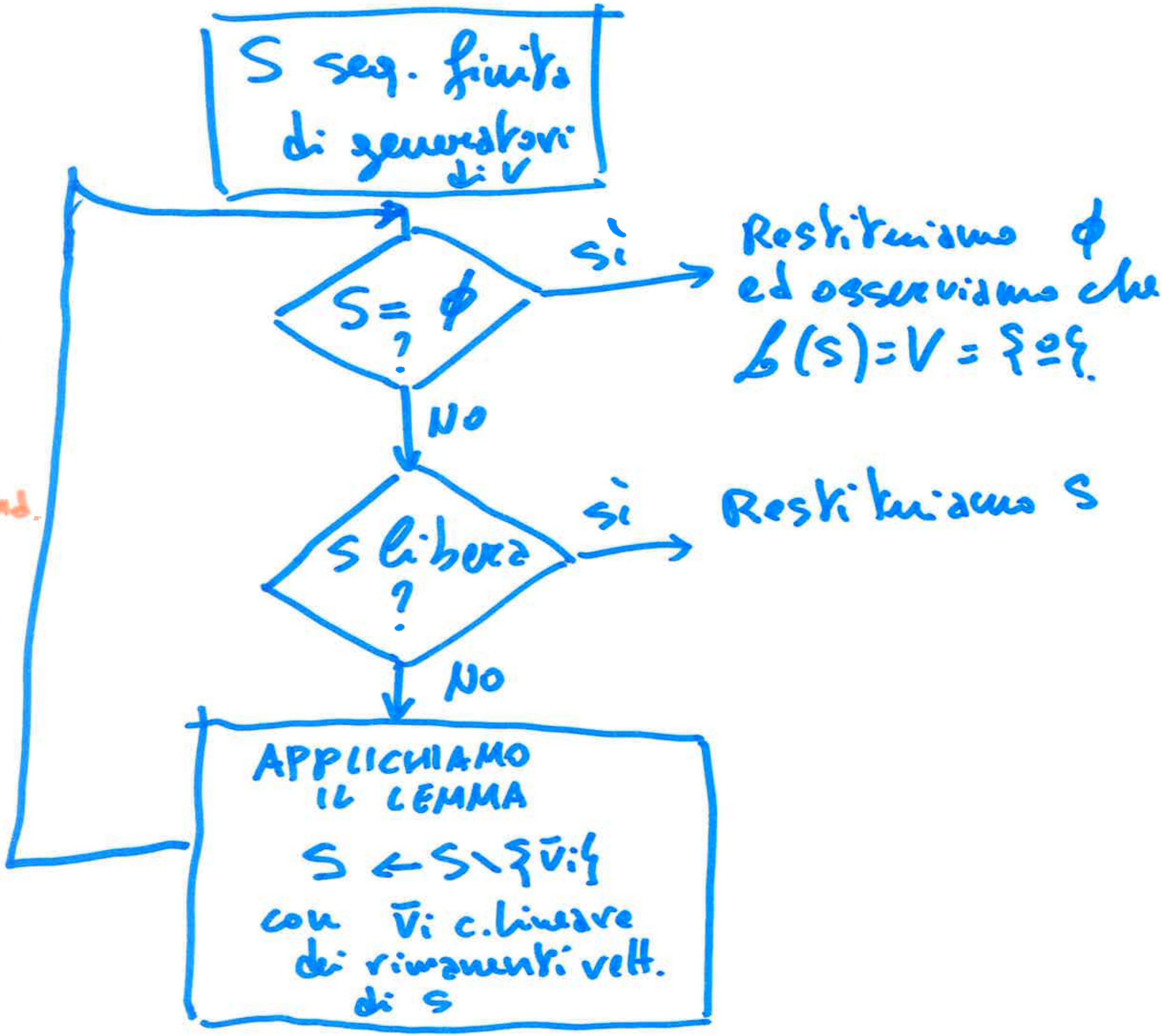
$$\Rightarrow \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) \supseteq \mathcal{L}(S).$$

viceversa ogni vettore di $\mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\})$ è anche un vettore di $\mathcal{L}(S) \Rightarrow \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) \subseteq \mathcal{L}(S)$

NE SEGUE $\boxed{\mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) = \mathcal{L}(S)}.$

$\square$

ALGORITMO (SCARTI SUCCESSIVI).



In al più $n = |S|$ passaggi la procedura termina.
Restituisce $\emptyset$ o una base di V.
Se l'output è $\emptyset$
$\Rightarrow V = \mathcal{L}(\emptyset) = \{\underline{0}\}$.

$S' = (\cancel{(0\,1\,0)}, (2\,1\,0), (1\,1\,0))$

S' libera? No : $(0\,1\,0) = 2(1\,1\,0) - (2\,1\,0)$

$\Rightarrow$ possiamo scartare $(0\,1\,0)$

$S'' = ((2\,1\,0), (1\,1\,0))$

S'' libera? Si. $\alpha(2\,1\,0) + \beta(1\,1\,0) = (0\,0\,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

restituiamo $((2\,1\,0), (1\,1\,0))$ base di $\mathcal{L}(S)$.

OSS: Se $\mathcal{L}(S)=\{\underline{0}\}$ $\Rightarrow$ l'unico vettore (potenzialmente ripetuto) che si può trovare in S è $\underline{0}$.

$S=(\underline{0},\underline{0},\underline{0},\underline{0})$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(S)=\{\underline{0}\}$ e V non ammette base.

Esempio $S=(\cancel{(120)},(010),(210),(110))$

Trovare una base per $\mathcal{L}(S)$.

$\mathcal{L}(S)\leq\mathbb{R}^3$ ma $\mathcal{L}(S)\neq\mathbb{R}^3$

S libera? <u>No</u>: $(120)=(110)+(010)$

$\Rightarrow$ possiamo scartare (120)

$$S = ((1\,2\,0), (0\,1\,0), \cancel{(2\,1\,0)}, \cancel{(1\,1\,0)}).$$

$$(1\,1\,0) = (1\,2\,0) - (0\,1\,0) \quad \text{scarto } (1\,1\,0)$$

$$(2\,1\,0) = 2(1\,2\,0) - 3(0\,1\,0) \quad \text{scarto } (2\,1\,0)$$

OTTENGO $S''' = ((1\,2\,0), (0\,1\,0))$

PRIMA AVEVAMO

$$S'' = ((2\,1\,0), (1\,1\,0))$$

$$\mathcal{L}((S''')) = \mathcal{L}(((1\,2\,0) - 2(0\,1\,0), (0\,1\,0)) =$$

$$\mathcal{L}(\underbrace{(1\,0\,0), (0\,1\,0)}_{\text{NON È UNA SOTTOSEQ. DI } S.}).$$

OSS 1) Aggiungere vettori ad una seq. di generatori dà ancora una seq. di generatori

2) Togliere vettori ad una seq. libera dà ancora una sequenza libera.

→ SCARTI SUCCESSIVI: ci dice quando/se/come possiamo togliere vettori ad una sequenza di generatori ed avere ancora una sequenza di generatori.

↓

si può fare quando la seq. è legata.

1) Se S di generatori e $S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$

e $W = (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_k)$ seq. di vettori $\Rightarrow$

$\forall \bar{x} \in \cancel{V(\mathbb{K})}\ \mathcal{L}(S)\ \exists\, \alpha_1 \dots \alpha_n : \bar{x} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n =$

$= \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n + 0\bar{w}_1 + \dots\ 0\bar{w}_k \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} \in \mathcal{L}(S \cup W). \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(S \cup W)$

viceversa: $\mathcal{L}(S) = V(\mathbb{K})$ perchè S di

generatori $\Rightarrow \mathcal{L}(S \cup W) \subseteq \mathcal{L}(S) \Rightarrow$ ok.

2) Se $S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ libera e per assurdo

$S' = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_{n-1})$ fosse legata $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} : \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \bar{v}_{n-1} = \underline{0}$ con

$(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}) \neq (0 0 \dots 0) \Rightarrow$

$\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \bar{v}_{n-1} + 0\bar{v}_n = \underline{0}$

con $(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}\, 0) \neq (0\,0 \dots 0) \Rightarrow S$ legata

↳ ASSURDO

$\square$

Lemma di Steinitz: Sia $A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$ una sequenza libera di vettori di $V(\mathbb{K})$.

$B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ una seq. di generatori.

Allora $m \leq n$ cioè $|A| \leq |B|$.

<u>N.B</u> A priori fra i vettori di A e quelli di B non c'è alcuna relazione.

<u>DIM:</u>

$A = (\bar{a}_1 \dots a_m)$

$B = (\bar{b}_1 \dots b_m \dots b_n)$

supponendo per assurdo che sia $m > n$

$$A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n \dots \bar{a}_m] \qquad m > n$$

$$B = [\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n] = B_0$$

1) B_0 è di generatori $\Rightarrow \exists\, \alpha_1 \dots \alpha_n$ tali che

$$\bar{a}_1 = \alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n.$$

poiché A è libera non può essere $\bar{a}_1 = \underline{0}$

$\Rightarrow \exists$ almeno un i tale che $\alpha_i \neq 0$.

supponiamo WLOG (= senza perdere in generalità without loss of generality). che sia $\alpha_1 \neq 0$. $\Rightarrow$

$$-\alpha_1 \bar{b}_1 = -\bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{b}_2 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n$$

$$\Rightarrow \bar{b}_1 = \alpha_1^{-1} (\bar{a}_1 - \alpha_2 \bar{b}_2 \dots - \alpha_n \bar{b}_n).$$

$$\Rightarrow \bar{b}_1 \in \mathcal{L}(\bar{a}_1, \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n).$$

pongo $B_1 = (\bar{a}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$

ed osservo che $\mathcal{L}(B_1) = \mathcal{L}(B_0)$

infatti se $\bar{w} \in \mathcal{L}(B_0) \Rightarrow$

$$\bar{w} = \gamma_1 \bar{b}_1 + \gamma_2 \bar{b}_2 + \dots + \gamma_n \bar{b}_n =$$

$$= \gamma_1 \left(\alpha_1^{-1} (\bar{a}_1 - \alpha_2 \bar{b}_2 \dots - \alpha_n \bar{b}_n\right) +$$

$$+ \gamma_2 \bar{b}_2 + \dots + \gamma_n \bar{b}_n \in \mathcal{L}(B_1)$$

Viceversa se $\bar{w} \in \mathcal{L}(B_1) \Rightarrow \bar{w} = \delta_1 \bar{a}_1 + \delta_2 \bar{b}_2 + \dots$

$$+ \delta_n \bar{b}_n =$$

$$= \delta_1 (\alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n b_n) + \delta_2 \bar{b}_2 + \dots + \delta_n \bar{b}_n$$

$\in \mathcal{L}(B_0)$.

$\Rightarrow \mathcal{L}(B_0) = \mathcal{L}(B_1)$.

$$A = [\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n a_{n+1} \dots a_m]$$

$$\left.\begin{array}{l} B_0 = [\bar{b}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n] \\ B_1 = [\bar{a}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n] \end{array}\right\} \text{generano la stessa cosa!!}$$

osserviamo ora che $\bar{a}_2 \in \mathcal{L}(B_1)$

$\Rightarrow \exists (\beta_1, \alpha'_2 \dots \alpha'_n) : \bar{a}_2 = \beta_1 \bar{a}_1 + \alpha'_2 \bar{b}_2 + \dots + \alpha'_n \bar{b}_n$.

NON È POSSIBILE CHE SIA $\alpha'_2 = \alpha'_3 = \dots = \alpha'_n = 0$ perché altrimenti $\bar{a}_2 = \beta_1 \bar{a}_1$ ma A è libera e quindi non può contenere vettori proporzionali.

STESSA PROCEDURA DI PRIMA: SCRIVIAMO WLOG.

$\bar{b}_2$ come c. lineare di $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_3 \dots \bar{b}_n$

e verifichiamo che posto

$$B_2 = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_3 \dots \bar{b}_n)$$

si ha $\mathcal{L}(B_2) = \mathcal{L}(B_1) = \mathcal{L}(B_0)$.

Iteriamo n volte queste considerazioni ed otteniamo

$$A = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n\ \bar{a}_{n+1} \dots)$$
$$B_0 = (\bar{b}_1\ \bar{b}_2 \dots b_n)$$
$$B_1 = (\bar{a}_1, \bar{b}_2 \dots b_n)$$
$$B_2 = (\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots b_n)$$
$$\vdots$$
$$B_n = (\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n).$$

In particolare B_n è formata da tutti vettori di A. e $\mathcal{L}(B_n) = \mathcal{L}(B_{n-1}) = \dots = \mathcal{L}(B_0)$

quindi B_n è di generatori.

$$\Rightarrow \bar{a}_{n+1} = \underbrace{\lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n}_{\text{vettori di } A.}$$

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n - \bar{a}_{n+1} = \underline{0}$$

ed i coeff. non sono tutti zero $\Rightarrow$ A è legata. ASSURDO ↯

$\Rightarrow$ deve essere $m \leq n$ $\square$

Idea essenziale della dim: sostituiamo ad uno ad uno i vettori della seq. di generatori B con vettori della seq. libera A.

\#

Esercizio: componenti di $\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3 + \bar{e}_4$ rispetto $(\bar{e}_4, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_2)$

$$\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3 + \bar{e}_4 = \alpha \bar{e}_4 + \beta(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + \gamma \bar{e}_3 + \delta \bar{e}_2$$

$$\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3 + \bar{e}_4 = \beta \bar{e}_1 + (\beta + \delta)\bar{e}_2 + \gamma \bar{e}_3 + \alpha \bar{e}_4$$

$$\beta = 1, \quad \beta + \delta = 2 \Rightarrow \delta = 1; \; \gamma = -1, \; \alpha = 1$$

componenti $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 1, -1, 1)$

<u>N.B.</u> DIVERSE DA COMPONENTI RISPETTO LA BASE CANONICA.

Metodo di completamento della base.

DATA SEQ. LIBERA + BASE

$\downarrow$

COSTRUIRE UNA SEQ. LIBERA DI GENERATORI CHE CONTENGA LA SEQUENZA DATA.

ALGORITMO = DIMOSTRAZIONE LEMMA DI STEINITZ.

$A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k)$ libera

$B_0 = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_k \dots \bar{b}_n)$ $\quad k \leq n.$

Se $k = n \Rightarrow A$ base $\Rightarrow$ FINE.

Se $K < n$ APPLICHIAMO LA TECNICA USATA PER STEINITZ PER COPIARE UNO AD UNO I VETTORI DI A in UNA BASE B_i

$$A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k)$$

$$B_0 = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_k \dots \bar{b}_n)$$

$$\bar{a}_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i \qquad a_i \neq 0$$

$\Rightarrow$ sostituiamo $\bar{b}_i$ con $\bar{a}_1$

$$B_1 = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_{i-1}\, \bar{a}_1\, b_{i+1} \dots \bar{b}_n)$$

Iteriamo K volte fino a che tutti i vettori di A sono stati copiati in B_K.

$$B_K = (\bar{b}_1 \dots \bar{a}_1 \dots \bar{a}_2 \dots \bar{a}_K \dots \bar{b}_n)$$

poniamo $B' = B_K \setminus A$.

→ In questo modo si ha

- $A \cup B'$ = base di $V_n(\mathbb{K})$

che 1) contiene A

2) si ottiene a partire da A aggiungendo vettori di B.

→ COMPLETAMENTO DELLA BASE.

$$A = \left(\overset{\overline{a}_1}{(00110)}, \overset{\overline{a}_2}{(10011)} \right) \subseteq \mathbb{R}^5$$

completare a base.

$$B = \left(\overset{\overline{e}_1}{(10000)}, \overset{\overline{e}_2}{(01000)}, \overset{\overline{e}_3}{(00100)}, \overset{\overline{e}_4}{(00010)}, \underset{\overline{e}_5}{(00001)} \right).$$

$\overline{a}_1 = (00110) = \overline{e}_3 + \overline{e}_4 \rightarrow$ sostituisco $\overline{e}_3$

$$B_1 = \left(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overset{\overline{a}_1}{(00110)}, \overline{e}_4, \overline{e}_5 \right).$$

$\overline{a}_2 = (10011) = \overline{e}_1 + \overline{e}_4 + \overline{e}_5$

$$B_2 = \left((10011), \overline{e}_2, (00110), \overline{e}_4, \overline{e}_5 \right).$$

$B' = (\bar{e}_1, \bar{e}_4, \bar{e}_5)$

$A = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$

Base completata $(\underbrace{\bar{a}_1, \bar{a}_2}_{\text{vettori di } A \text{ nell'ordine}}, \underbrace{\bar{e}_1, \bar{e}_4, \bar{e}_5}_{\text{vettori di } B' \text{ nell'ordine}})$