__N.B.__ Il metodo degli scarti successivi e la dim. di Steinitz sono sui fogli della lezione successiva!

Tutoraggio: Lunedì mattina
ore 9
Aula N7
Stefano della Fiore.

Base (base ordinata)

→ Sequenza libera di generatori

→ Sia $V(\mathbb{K})$ uno s.vett. e $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una sua base. Allora

$$\boxed{\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{K}) \ \exists! (a_1 \dots a_n) \in \mathbb{K}^n : \quad \bar{v} = a_1 \bar{e}_1 + \dots + a_n \bar{e}_n}$$

Ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ si scrive in modo unico in componenti rispetto a $\mathcal{B}$.

↳ coeff. della c. lineare dei vettori di $\mathcal{B}$ nell'ordine con cui compaiono in $\mathcal{B}$ che fornisce $\bar{v}$.

1) Sequenza di generatori $\Rightarrow \forall \bar{v} \in V \ \exists \alpha_1 \dots \alpha_n : \bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$

ogni vettore si scrive con almeno una c. lineare

2) Sequenza libera $\Rightarrow \forall \bar{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}) \ \exists! (\alpha_1 \dots \alpha_n) :$

$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$

ogni vettore che è c. lineare si scrive in modo unico

1)+2) OGNI VETTORE SI SCRIVE IN COMPONENTI IN MODO UNICO

N.B. le componenti dipendono da $\bar{v}$ e da $\mathcal{B}$.

BASE = SEQ. LIBERA DI GENERATORI

Lemma di Steinitz:

Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale finitamente generato $\mathcal{A} = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$ una sua sequenza libera di vettori $\mathcal{B} = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ una sua sequenza di generatori.

Allora $m \leq n$.

[Una sequenza libera di vettori contiene al più tanti vettori quanti una seq. di generatori]

[la più grande sequenza libera ha al più tanti vettori quanti la più piccola sequenza di generatori]

CONSEGUENZE

1) OGNI 2 BASI DI UNO SP. VETT. HANNO LO STESSO NUMERO DI VETTORI.

Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi $\Rightarrow$

$$\left.\left.\begin{array}{l}\mathcal{B} \text{ di generatori} \\ \mathcal{B}' \text{ libera}\end{array}\right] \Rightarrow |\mathcal{B}| \geq |\mathcal{B}'| \atop \left.\begin{array}{l}\mathcal{B} \text{ libera} \\ \mathcal{B}' \text{ di generatori}\end{array}\right] \Rightarrow |\mathcal{B}'| \geq |\mathcal{B}|\right] \Rightarrow |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$$

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale.

Se $V(\mathbb{K}) = \{\underline{0}\}$ $\Rightarrow$ poniamo $\dim V = 0$

Se $V(\mathbb{K})$ ha una base (e quindi ogni base) formata da n vettori $\Rightarrow$ poniamo $\dim V = n$

DIMENSIONE DI $V(\mathbb{K})$.

1) Sia $V(\mathbb{K})$ uno s. vettoriale di $\dim = n$.

Allora

A) nessuna seq. di $m < n$ vettori è di generatori

B) nessuna seq. di $m > n$ vettori è libera.

DIM: $\exists$ una base di n vettori $\Rightarrow$ seq. di n generatori $\Rightarrow$ ogni seq. libera ha $m \leq n$ vettori $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sequenza di più di n vettori legata.

$\exists$ una base di n vettori $\Rightarrow$ seq. libera di n vettori $\Rightarrow$ ogni seq. di generatori ha $m \geq n$ vettori $\Rightarrow$ sequenza di meno di n vettori non può generare.

3) Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno s. vettoriale di dim = n.

A) Una sequenza di n generatori di $V(\mathbb{K})$ è libera.

B) Una sequenza libera di n vettori è di generatori.

[# giusto di vettori] + $\left\{ \begin{matrix} \text{libera} \\ \text{di generatori} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ BASE.

DIM

→ Supponiamo S di generatori, S legata,

$|S| = n$

⇒ Applicando gli scarti successivi ottieniamo una seq. S' di $|S|-1 = n-1$ generatori ⇒ ASSURDO perché esiste una seq. libera di n vettori.

→ Supponiamo S libera, $|S| = n$, S non di generatori

$\Rightarrow \exists\, \bar{w} \in V \setminus \mathcal{L}(S)$.

MA $S \cup \{\bar{w}\}$ é libera; infatti consideriamo

$S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) \quad S \cup \{\bar{w}\} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n, \bar{w})$.

e supponiamo $S \cup \{\bar{w}\}$ legata $\Rightarrow$

$\exists\ \alpha_1 \dots \alpha_n, \beta :\quad \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n + \beta \bar{w} = \underline{0}$

con $(\alpha_1 \dots \alpha_n, \beta) \neq (0 0 \dots 0)$.

MA non può essere $\beta = 0$ perché se

fosse $\Rightarrow\ \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n + 0 \cdot \bar{w} =$

$= \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0}$

con $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (0 0 \dots 0) \Rightarrow$ sarebbe S legata.

D'altro canto se $\beta \neq 0 \Rightarrow \exists\ \beta^{-1} \in \mathbb{K} \Rightarrow$

$\bar{w} = \beta^{-1}(\beta \bar{w}) = \beta^{-1}(-\alpha_1 \bar{v}_1 \dots - \alpha_n \bar{v}_n)$

$\Rightarrow \bar{w} \in \mathcal{L}(S)$ ASSURDO perché by $\bar{w} \in V \setminus \mathcal{L}(S)$ $\square$

CAMBIAMENTO DI BASE.

COME CAMBIANO LE COMPONENTI DI $\bar{v}$ al VARIARE DELLA BASE SCELTA?

Sia $V_n(\mathbb{K})$ s. vettoriale di dimensione $= n$

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una sua base e

$\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$ una sua altra base.

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = \alpha_1' \bar{e}_1' + \dots + \alpha_n' \bar{e}_n'$$

$(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ componenti rispetto a $\mathcal{B}$ | $(\alpha_1' \dots \alpha_n')$ componenti rispetto a $\mathcal{B}'$

Legame fra $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ e $(\alpha_1' \dots \alpha_n')$.

I vettori di $\mathcal{B}'$ sono vettori di $V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow$ si scrivono in componenti rispetto a $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
\bar{e}_1' &= a_{11}\bar{e}_1 + \dots + a_{1n}\bar{e}_n \\
\bar{e}_2' &= a_{21}\bar{e}_1 + \dots + a_{2n}\bar{e}_n \\
&\vdots \\
\bar{e}_n' &= a_{n1}\bar{e}_1 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n
\end{aligned} \qquad (*)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix} \qquad E' = \begin{pmatrix} \bar{e}_1' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix}$$

(*) si riscrive $E' = A\,E$

prodotto righe per colonne.

$$\alpha_1\bar{e}_1 + \dots + \alpha_n\bar{e}_n = (\alpha_1 \dots \alpha_n)E = \bar{v} = \alpha_1'\bar{e}_1' + \dots + \alpha_n'\bar{e}_n' =$$
$$= (\alpha_1' \dots \alpha_n')E'$$

MA $E' = AE$ FORMALMENTE.

DEVE ESSERE $(\alpha_1 \dots \alpha_n)E = (\alpha_1' \dots \alpha_n')AE$

scrittura formale ma

$(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ e $(\alpha_1' \dots \alpha_n')A$

sono le componenti del medesimo vettore rispetto ad E. $\Rightarrow$

$$(\alpha_1 \dots \alpha_n) = (\alpha_1' \dots \alpha_n')A$$

ovvero $$\boxed{{}^T(\alpha_1 \dots \alpha_n) = {}^TA\,{}^T(\alpha_1' \dots \alpha_n')}$$

CAMBIAMENTO DI BASE

A = matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

$\Rightarrow$ MATRICE CHE HA PER RIGHE LE COMPONENTI DEI VETTORI DI $\mathcal{B}'$ RISPETTO A $\mathcal{B}$.

$$^T(a_1 \dots a_n) = {}^T\!A\, {}^T(a'_1 \dots a'_n)$$

equazione che collega le coordinate (componenti) di un vettore rispetto a $\mathcal{B}'$ con quelle rispetto a $\mathcal{B}$.

Teorema: le matrici di cambiamento di base sono tutte quadrate $n \times n$ ed invertibili.

In particolare

1) hanno determinante non nullo.
2) le loro righe/colonne sono una base di $\mathbb{K}^n$ (in particolare sono linearmente indipendenti).

DIM: A) Tutte le basi di $V_n(\mathbb{K})$ hanno n vettori $\Rightarrow$ le componenti di ognuno degli n vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono n $\Rightarrow$ MATRICE QUADRATA $n \times n$.

B) Siano A matrice di camb. di BASE DA $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

A' matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Consideriamo la matrice

$${}^{T}(A'A) = {}^{T}A\,{}^{T}A'$$

A contiene come righe le componenti dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto a $\mathcal{B}$.

A' contiene come righe le componenti dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto $\mathcal{B}'$.

$${}^{T}A\,{}^{T}A' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = {}^{T}A \begin{pmatrix} a'_{11} \\ a'_{12} \\ \vdots \\ a'_{1n} \end{pmatrix}$$

= componenti del vettore

$$a'_{11}\bar{e}'_1 + \dots + a'_{1n}\bar{e}'_n$$ rispetto la

base $\mathcal{B}$ ma questo vettore è proprio

$\bar{e}_1$ perché per costruzione di A'

$$\bar{e}_1 = a'_{11}\bar{e}'_1 + \dots + a'_{1n}\bar{e}'_n$$

$\Rightarrow$ queste componenti devono essere $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$E = {}^T\!A\,{}^T\!A' E$$

Idem per tutti gli altri vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow {}^T\!A\,{}^T\!A' = I_n \Rightarrow {}^T\!A' = {}^T\!A^{-1} \Rightarrow A' = A^{-1}. \quad \square$$

OSS: Sia A una matrice di cambiamento di base $\Rightarrow$ le righe di A sono linear. indipendenti.

Se non lo fossero $\Rightarrow \exists$ una c. lineare delle righe di A a coeff non tutti nulli che dà $\underline{0}$

$\Rightarrow$ in particolare visto che

$$E' = AE$$

avremmo un vettore X di coeff non tutti nulli tale che $X = (x_1 \dots x_n) \neq \underline{0}$

$$XE' = X(AE) = (XA)E \text{ con } XA = (0 \dots 0) \text{ ed } X \neq \underline{0} \Rightarrow$$

esisterebbe una c. lineare di vettori di E' che dà

$\underline{0}$ con coeff. non tutti nulli ~~ug~~ perché E' base.

Se le righe di A sono lin. indip $\Rightarrow$ A è una possibile matrice di camb. di base.

ponete $E' = AE$

$\Rightarrow E' =$ collezione di n vettori di $V_n(\mathbb{K})$.

e ~~se~~ $\exists\, X = (x_1 \dots x_n) \neq (0\,0 \dots 0)$ tale che

$XE' = \underline{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow X(AE) = \underline{0} \Rightarrow (XA) = \underline{0}$ perché

E è base $\overset{\text{li}}{\Rightarrow}$ E' è libera $\square$

Teorema: Una matrice $n \times n$ è invertibile $\Leftrightarrow$ ha $\det \neq 0$
$\Leftrightarrow$ le sue righe/colonne sono una seq. libera di vett.

verificare se la seq.

$(1\,3\,5),\ (2\,0\,7)\quad(-1\,3\,-2)$

é libera.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-2) + 3\cdot 7\cdot(-1) + 5\cdot 2\cdot 3$$

$$-5\cdot 0\cdot(-1) - 3\cdot 2\cdot(-2) - 1\cdot 7\cdot 3 =$$

$$= -21 + 30 + 12 - 21 =$$

$$= 42 - 42 = 0$$

LEGATA

verificare se la seq $(1\,3\,5\,8)\ (0\,1\,2\,6)$

$(0\,0\,2\,1)\quad(1\,0\,0\,1)$

libera.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - \left(2 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= 2 - (9 - 1) = -6 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{LIBERA}}$$

LAPLACE I colonna

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

Esercizio: per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la seq.

$(1\ 2\ 0\ k)\quad(0\ 1\ 0\ 1)\quad(0\ 0\ k\ 3)\quad(0\ 0\ 0\ k+2)$

é libera?

libera $\iff \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{vmatrix} \neq 0$

$$= 1 \cdot k(k+2)$$

la seq. è libera $\iff k \neq 0, -2$

$(1\ 2\ 0\ k)$ $(0\ 1\ 0\ 1)$ $(0\ 0\ k\ 3)$ $(0\ 0\ 1\ k+2)$

$$\det M = \begin{vmatrix} k & 3 \\ 1 & k+2 \end{vmatrix} = k(k+2) - 3 =$$

$$= k^2 + 2k - 3$$

$$k \neq -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$$

$$-3$$

$$\begin{matrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$$\left(\frac{7}{2}, -4, \frac{7}{2}, 3\right) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

<u>N.B.</u> vettore riga delle componenti!!!

NON SCRIVERE $\cancel{\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -4 \\ \frac{7}{2} & 3 \end{pmatrix}}$

<u>OSS</u> che le componenti di

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ rispetto } \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

sono $(7, -1, 4, 0)$

COMPONENTI DI

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

RISPETTO

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha+\gamma & \beta+\delta \\ -\beta & -\alpha+\gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 7 \\ \beta + \delta = -1 \\ -\beta = 4 \\ -\alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \gamma \\ 2\alpha = 7 \\ \beta = -4 \end{cases} \quad \delta = 3$$

MATRICE DI CAMB. DI BASE DA $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

componenti di $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}'$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = {}^{T}\!A^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice ${}^{T}\!A$ dà le componenti rispetto a $\mathcal{B}$ di un vettore scritto rispetto $\mathcal{B}'$.

Ci serve ${}^{T}\!A^{-1}$ $\rightarrow$ componenti rispetto $\mathcal{B}'$ di un vettore scritto rispetto a $\mathcal{B}$.

Come costruire una base di uno s. vett. finit. generato.

1) Partire da un sistema di generatori finito.

↓

APPLICARE IL METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI

$(v_1 \dots v_m)$ sist. di generatori.

1) Se $\overline{v}_1 = \overline{v}_2 = \dots = \overline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow V_n(\mathbb{K}) = \{\underline{0}\}$.

non $\exists$ base

$\rightarrow$ restituiamo $\emptyset$

fine.

2) Se $(\overline{v}_1 \dots \overline{v}_m)$ libera $\longrightarrow$ $(\overline{v}_1 \dots \overline{v}_n) \equiv$ BASE

FINE

↓

basta sincerarsi che i vett. siano n

perché in $V_n(\mathbb{K})$
una sequenza di $n = \dim V_n$
generatori è sempre libera.

ATT: BISOGNA SAPERE CHE COSA
LA SEQ. DATA GENERA!

3) $(v_1 \dots v_m)$ Legata $\Rightarrow \exists\, \bar{v}_i$ comb. lineare dei rimanenti.

Togliamo $\bar{v}_i$ dalla seq. $\to$ se resta ϕ
$\Rightarrow V_n(\mathbb{K}) = \{0\} \to$ FINE

ALTRIMENTI RIPARTIAMO DA 1).

In $\mathbb{R}^3$ supponiamo di avere
$$((1\,0\,0), (2\,1\,0), (0\,1\,0), (1\,1\,1), (2\,3\,5))$$

seq. legata in generato

$$(0\,1\,0) = (2\,1\,0) - 2(1\,0\,0)$$

TOGLIAMO $(0\,1\,0)$.

$$((1\,0\,0), (2\,1\,0), (1\,1\,1), (2\,3\,5))$$

$$(1\,1\,1) = \frac{1}{5}(2\,3\,5) + \frac{2}{5}(2\,1\,0) + \frac{1}{5}(1\,0\,0)$$

$$\frac{2}{5} \quad \frac{3}{5} \quad 1$$

TOGLIAMO $(1\,1\,1)$

$((1\,0\,0), (2\,1\,0), (2\,3\,5))$ BASE?

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 \quad \longrightarrow \quad \text{sí è base.}$$

Scarti successivi $\rightarrow$ seq. "grande" di generatori

$\downarrow$ TOGLIAMO VETTORI

seq. minimale di generatori = BASE.

Teorema di completamento della base

seq "piccola" libera

$\downarrow$ AGGIUNGIAMO VETTORI

seq. libera massimale = BASE

+ BASE

Teorema: Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale finitamente generato e $\mathcal{B}$ una sua fissata base.

Sia inoltre $S \subseteq V_n(\mathbb{K})$ una sequenza libera di vettori.

Allora esiste $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tale che $S \cup \mathcal{B}'$ è base di $V_n(\mathbb{K})$.

(Teorema di completamento della base)

$\mathcal{B}'$ è quello che "completa" la seq. S a base.

DIM: come Steinitz.

$S = (\bar{s}_1 \dots \bar{s}_k)$ seq. libera

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k \dots \bar{e}_n)$ base.

$\bar{s}_1$ è comb. lineare di $\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n$ perché $\mathcal{B}$ base

supponiamo $\bar{s}_1 = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$ e non tutti gli α_i sono $= 0$ perché S libera

WLOG supponiamo $d_1 \neq 0 \Rightarrow$ come in Steinitz possiamo costruire

$$\mathcal{B}_{\underline{1}} = (\bar{s}_1 \, \bar{e}_2 \, \dots \, \bar{e}_n)$$

sostituendo in $\mathcal{B}$ il vettore $\bar{e}_1$ con $\bar{s}_1$.

continuiamo come nella dim di Steinitz fino a che in $\mathcal{B}_k$ abbiamo "spostato tutti i vettori di S.

$\rightarrow$ in particolare $\mathcal{B}_k$ è di generatori, di n vettori $\Rightarrow$ base e possiamo porre

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}_k \setminus S.$$

$\square$

Esempio in $\mathbb{R}^4$

$$S = ((1010), (0011))$$

$$\mathcal{B} = ((1000), (0100), (0010), (0001))$$

$$(1010) = \underline{1} \cdot (1000) + 0 \cdot (0100) + 1 \cdot (0010) + 0 \cdot (0001)$$

$\neq 0 \Rightarrow$ sostituisco $\bar{e}_1$

$$\mathcal{B}_1 = ((1010), (0100), (0010), (0001))$$

$$(0\,0\,1\,\underline{1}) = 0 \cdot (\underline{1}010) + 0 \cdot (0100) + \underline{1} \cdot (00\underline{1}0) + 1 \cdot (0001)$$

$\neq 0 \Rightarrow$ sostituisco $\bar{e}_3$

$$\mathcal{B}_2 = (\underline{(1010)}, (0100), \underline{(0011)}, (0001))$$

In particolare $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_2 \setminus S =$

$= ((0100), (0001)).$

#

$$S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{B} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{B}'$ base di V_n contenente S.

$(0001) = (0011) - (0010)$

$(0010) = (1010) - (1000)$

N.B Scartiamo <u>solo</u> vettori di $\mathcal{B}$.

N.B. In $\mathbb{R}^4$ la base

$((1000),(0100),(0010),(0001))$ è canonica

$((0100),(1000),(0010),(0001))$ **NON** è canonica.

$\downarrow$

le componenti di (a,b,c,d) rispetto questa base sono $(b\ a\ c\ d) \neq (a,b,c,d)$.

$((-1000),(0-100),(00-10),(000-1))$ NON è CANONICA.

$((\sqrt{3},1,5,2),(\sqrt{2}\ 016),(\pi,6,\frac{17}{3},8),(\sqrt{11}-2,7,-3,e))$