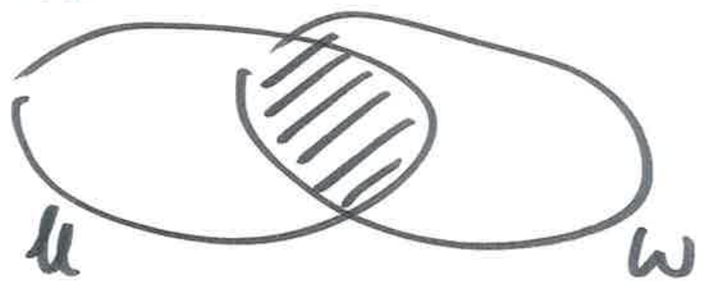
Sottospazio: $X \subseteq V(\mathbb{K})$ tale che X è a sua volta spazio vettoriale.

$\{\underline{0}\} \subseteq V(\mathbb{K})$ $\quad V \subseteq V(\mathbb{K})$ sono sottospazi vettoriali di $V(\mathbb{K})$

$\rightarrow$ sottospazi banali.

1) cosa succede se intersechiamo 2 sottospazi di $V(\mathbb{K})$?



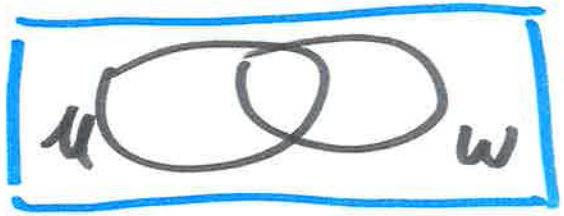
si ottiene un nuovo sottospazio, a priori più piccolo, di $V(\mathbb{K})$

$\forall \bar{u}, \bar{w} \in U \cap W \quad \bar{u}, \bar{w} \in U \Rightarrow \forall \alpha, \beta : \alpha\bar{u} + \beta\bar{w} \in U$

$\bar{u}, \bar{w} \in W \Rightarrow \forall \alpha, \beta : \alpha\bar{u} + \beta\bar{w} \in W$

$\Rightarrow \alpha\bar{u} + \beta\bar{w} \in U \cap W$

1) come costruire dati U, W un sottospazio che li contenga entrambi?



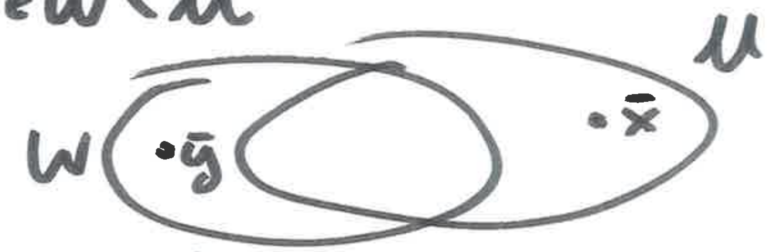
$U + W$

OSS: $U \cup W \leq V(\mathbb{K}) \iff U \subseteq W$ o $W \subseteq U$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$U \cup W = W \qquad U \cup W = U$

Supponiamo $\exists\, \bar{x} \in U \setminus W$ & $\bar{y} \in W \setminus U$



$\Rightarrow$ consideriamo il vettore $\bar{x} + \bar{y}$. Se fosse $\bar{x} + \bar{y} \in U \cup W \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \in U$ oppure $\bar{x} + \bar{y} \in W$

ma se $\bar{x}+\bar{y} \in \mathcal{U}$ & $\bar{x} \in \mathcal{U} \Rightarrow (\bar{x}+\bar{y})-\bar{x}=\bar{y} \in \mathcal{U}$

ASSURDO perché $\bar{y} \notin \mathcal{U}$.

similmente se $\bar{x}+\bar{y} \in W$ & $\bar{y} \in W \Rightarrow (\bar{x}+\bar{y})-\bar{y}=\bar{x} \in W$

ASSURDO perché $\bar{x} \notin W$.

$\Rightarrow$ NE SEGUE CHE $\mathcal{U} \cup W$ non è sott. vettoriale.

Somma di due sottospazi:

$$\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$$

$$\boxed{\mathcal{U}+W := \{\bar{u}+\bar{w} \mid \bar{u} \in \mathcal{U}, \bar{w} \in W\}}.$$

<u>Teorema</u>: Siano $\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$. Allora $\mathcal{U}+W$ è il più piccolo sottospazio di $V(\mathbb{K})$ che contiene sia $\mathcal{U}$ che W.

DICIAMO CHE X è il più piccolo sottospazio con una certa proprietà (ad esempio che contiene il sottoinsieme Y) se ogni sottospazio che gode di quella proprietà (es. contenere Y) deve anche contenere X ed X ha la proprietà.

$$(*)\quad \forall\, Y \leq V(\mathbb{K}) : \mathcal{U} \cup W \subseteq Y \Rightarrow \mathcal{U} + W \leq Y$$

1) $\mathcal{U} + W \leq V(\mathbb{K})$

2) $(*)$

Siano $\bar{u}_1 + \bar{w}_1,\ \bar{u}_2 + \bar{w}_2 \in \mathcal{U} + W$
$(\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in \mathcal{U},\ \bar{w}_1, \bar{w}_2 \in W)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\Rightarrow \alpha(\bar{u}_1 + \bar{w}_1) + \beta(\bar{u}_2 + \bar{w}_2) =$$
$$= \underbrace{(\alpha \bar{u}_1 + \beta \bar{u}_2)}_{\in \mathcal{U}} + \underbrace{(\alpha \bar{w}_1 + \beta \bar{w}_2)}_{\in W} \in \mathcal{U} + W$$

$\rightarrow \mathcal{U} + W$ sottospazio

1) Inoltre $\left.\begin{array}{l}\forall \bar{u} \in U : \bar{u} + \underline{0} = \bar{u} \in U + W \\ \forall \bar{w} \in W : \underline{0} + \bar{w} = \bar{w} \in U + W\end{array}\right]$ $U \cup W \subseteq U + W$.

OSSERVIAMO CHE SE $Y \leq V(\mathbb{K})$ e $U \subseteq Y$, $W \subseteq Y \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \bar{u} \in U, \forall \bar{w} \in W : \bar{u} + \bar{w} \in Y \Rightarrow$

$\Rightarrow U + W \leq Y$. $\square$

3) dato un insieme $X \subseteq V(\mathbb{K})$ determinare il più piccolo sottospazio vettoriale che lo contiene.

$\downarrow$

(sotto)spazio vettoriale generato da X.

<u>Def.</u>: Sia $X \subseteq V(\mathbb{K})$. si dice <u>copertura lineare</u> di X

$\mathcal{L}(X)$ $\langle X \rangle$ l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di un numero finito di elementi di X.

$$\mathcal{L}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i \;\middle|\; \bar{x}_i \in X, \overset{\alpha_i \in \mathbb{K}}{n \in \mathbb{N}} \right\}.$$

Se $X = \phi \Rightarrow$ poniamo $\mathcal{L}(X) = \{\underline{0}\}$.

In $\mathbb{R}^{2,2}$ $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ In $\mathbb{R}^4$ $\underline{0} = (0\ 0\ 0\ 0)$

A rigore $\mathcal{L}(X)$ è $\mathcal{L}_{V(\mathbb{K})}(X)$ "copertura lineare in $V(\mathbb{K})$ di X"

Sottoinsiemi di $V(\mathbb{K})$ $\longrightarrow$ sottospazi di $V(\mathbb{K})$.

$\mathcal{L}(X)$ è il più piccolo sottospazio di $V(\mathbb{K})$ che contiene X.

<u>DIM</u>: 1) $X \subseteq \mathcal{L}(X)$ (ovvio: c. lineari di 1 elemento di X con coeff $= 1$).

2) $\mathcal{L}(X) \leq V(\mathbb{K})$

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i \qquad \bar{b} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \bar{x}_i \quad \in \mathcal{L}(X)$$

$$\lambda \bar{a} + \mu \bar{b} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i + \mu \sum_{i=1}^{m} \beta_i \bar{x}_i =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i) \bar{x}_i + \sum_{i=1}^{m} (\mu \beta_i) \bar{x}_i}_{\text{NUMERO FINITO DI EL. DI X.}}$$

3) Supponiamo $\mathcal{Y} \leq V(\mathbb{K})$ con

$X \subseteq \mathcal{Y}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{Y}$.

Infatti se $\mathcal{Y} \leq V(\mathbb{K})$ ed $X \subseteq \mathcal{Y} \Rightarrow$ ogni c. lineare di un numero finito di elementi di X deve essere contenuta in $\mathcal{Y}$ visto che $\mathcal{Y}$ è chiuso rispetto le c. lineari (finite) $\Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{Y}$ $\square$

$\ulcorner \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{Y} \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}: \alpha \bar{x} + \beta \bar{y} \in \mathcal{Y} \lrcorner$

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale
$X \subseteq V(\mathbb{K})$ un suo sottoinsieme/seq. di vettori.
Si dice che X è un <u>insieme/sequenza di generatori</u> per $V(\mathbb{K})$ se $\mathcal{L}(X) = V$

OGNI VETTORE DI $V(\mathbb{K})$ SI PUÒ SCRIVERE COME COMBINAZIONE LINEARE DI UN NUMERO FINITO DI ELEMENTI DI X

$V(\mathbb{K})$ è finitamente generato se $\exists X \subseteq V(\mathbb{K})$
$|X| = n < \infty$ tale che $\mathcal{L}(X) = V$.

$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$.

$X = \{(1\,0\,0),\ (0\,1\,0),\ (0\,0\,1)\}$.

$\mathcal{L}(X) = \{\alpha(1\,0\,0) + \beta(0\,1\,0) + \gamma(0\,0\,1) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

$= \{(\alpha,\beta,\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$.

$\mathbb{R}^3$ è <u>finitamente generato</u>.

$X' = \{(1\,1\,1), (0\,1\,0), (0\,0\,1), (2\,1\,1)\}$.

$\mathcal{L}(X') = \mathbb{R}^3$

$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

$X = ((100), (010), (001))$

$X' = ((111), (010), (001), (211))$

$(\alpha, \beta, \gamma) = x(100) + y(010) + z(001)$

$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases}$

$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \ \exists! (\alpha, \beta, \gamma)$ tale che la c. lineare di X con questi valori dà $\vec{v}$.

$(\alpha \ \beta \ \gamma) = x(111) + y(010) + z(001) + t(211)$

$\begin{cases} x + 2t = \alpha \\ x + y + t = \beta \\ x + z + t = \gamma \end{cases}$

$\begin{cases} x = \alpha - 2t \\ y = \beta - t - x = \beta - \alpha + t \\ z = \gamma - x - t = \gamma - \alpha + t \end{cases}$

∞ possibilità.

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale.

Si dice **BASE** di $V(\mathbb{K})$ una sequenza di vettori di $V(\mathbb{K})$ $\mathcal{B}$ tale che ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ 1) si possa scrivere 2) in modo unico come comb. lineare di un numero finito di elementi di $\mathcal{B}$.

$$\forall \bar{v} \in V \ \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \bar{v} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n \qquad \bar{b}_i \in \mathcal{B}$$

N.B. $\mathcal{B}$ è ordinata. [BASE ORDINATA]

1) Una base è una sequenza di generatori
+ ??

2)

__Def__: Una sequenza $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ di vettori è detta libera se l'unica sua comb. lineare che dà $\underline{0}$ è quella con coeff. tutti nulli.

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

(i vettori sono detti linearmente indipendenti).

Una sequenza non libera è detta legata e i vettori sono detti linearmente dipendenti.

sequenza legata se $\exists$ almeno 2 modi per scrivere $\underline{0}$ come combinazione lineare

(uno a coeff. tutti 0 e l'altro no)

equiv.

$\exists (\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (0\, 0 \dots 0) : \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0}$

poiché rispetto una base ogni ~~sequen~~ vettore si scrive in modo unico come c. lineare, NECESSARIAMENTE anche $\underline{0}$ si deve scrivere in modo unico

$\Rightarrow$ Una BASE deve essere una seq. libera di generatori.

<u>Teorema</u>: Una base è una sequenza libera di generatori di $V(\mathbb{K})$.

<u>DIM</u>: Ci basta far vedere che ogni vettore si scrive in modo unico come c. lineare degli elementi della base.

Supponiamo $\mathcal{B} = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ e $\mathcal{B}$ seq. libera (di gen.).

$\bar{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \bar{b}_2 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n$$

supponiamo anche

$$\bar{v} = \beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \dots \beta_n \bar{b}_n$$

allora $\underline{0} = \bar{v} - \bar{v} = (\alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n) - (\beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_n \bar{v}_n)$

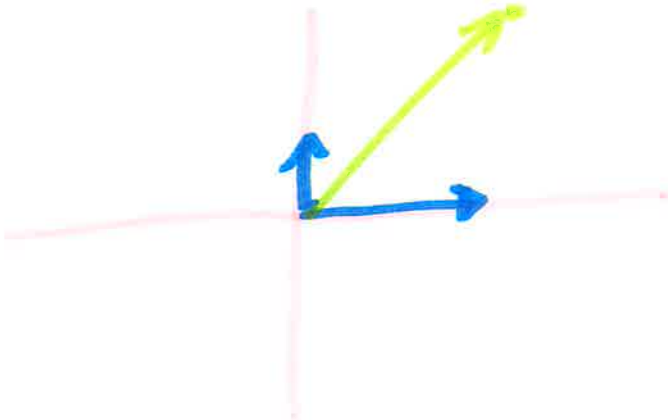
$= (\alpha_1 - \beta_1)\bar{b}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\bar{b}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\bar{v}_n$

se $\mathcal{B}$ libera $\Rightarrow$ deve essere

$\alpha_1 = \beta_1, \ \alpha_2 = \beta_2 \ \dots \ \alpha_n = \beta_n$

perché tutti i coeff. sono necessariamente 0. $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ libera e di generatori

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ base. $\square$



$\mathbb{R}^2$

$\mathcal{B} = (\uparrow, \longrightarrow)$

$\bar{v} = \nearrow = 3\uparrow + 1 \longrightarrow$

componenti di $\bar{v}$

$(3,1)$

rispetto $\mathcal{B}$

$(\alpha, \beta) \underset{\text{biunivoca}}{\longleftrightarrow}$ e frecce

$\mathcal{B} = (\uparrow, \longrightarrow)$

$\bar{v} = \nearrow = 1 \longrightarrow + 3\uparrow$

$\mathcal{B}' = (\longrightarrow, \uparrow)$

componenti di $\bar{v}$

$(1,3)$

$\bar{v} = \nearrow = 0 \nwarrow + 1 \nearrow$

componenti $(0,1)$

$\mathcal{B} = (\nwarrow, \nearrow)$

$$\mathbb{R}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{rispetto a } \mathcal{B}]{\text{comp.}} (a, b, c, d)$$

$$\| $$

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow (a\ c\ d\ b)$$