Sia $\mathbb{K}$ un campo. $V(\mathbb{K})$ spazio vett. su $\mathbb{K}$

$$|\mathbb{K}| = \infty \Rightarrow |V(\mathbb{K})| = \infty \text{ a meno che } V = \{\underline{0}\}.$$

$$\exists \bar{v} \in V : \bar{v} \neq \underline{0} \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \alpha\bar{v} \neq \beta\bar{v} \iff \alpha \neq \beta$$

Esempio di s. vettoriale

Sia $\mathbb{K}$ un campo.

$\mathbb{K}[x] = \{a_0 + a_1 x + \dots \mid a_i \in \mathbb{K}\}$ insieme di tutti i polinomi in x a coeff. in $\mathbb{K}$.

→ $\mathbb{K}[x]$ con la somma di polinomi come operazione è uno spazio vettoriale.

$f(x) = f_0 + f_1 x + \dots + f_n x^n \qquad g(x) = g_0 + g_1 x + \dots + g_n x^n \Rightarrow$

$$(f+g)(x) = (f_0+g_0) + (f_1+g_1)x + \dots + (f_n+g_n)x^n$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f_0 + \alpha f_1 x + \dots \alpha f_n x^n$$

$\mathcal{F}(X;\mathbb{K})\{ f : X \to \mathbb{K} \mid f$ funzione con codominio un campo $\mathbb{K}\}$.

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x).$$

$$\mathbb{K}[x]_n = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{K},\ \deg f(x) \leq n \}.$$

è uno spazio vett.

$$(a_0\ a_1 \dots a_n) + (b_0 \dots b_n) = (a_0+b_0 \dots a_n+b_n)$$

$$\alpha(a_0 \dots a_n) = (\alpha a_0 \dots \alpha a_n)$$

$\mathbb{K}[x]_n$ "si comporta come" $\mathbb{K}^{n+1}$

$\mathbb{K}^{m,n}$ "si comporta come" $\mathbb{K}^{mn}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow (a_{11} \dots a_{1n}\ a_{21} \dots a_{2n} \dots \ a_{mn})$$

<u>Def</u> :

1) <u>combinazione lineare</u>

Siano $\overline{v}_1 \dots \overline{v}_k \in V(\mathbb{K})$ vettori

$\alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{K}$ scalari

si dice c. lineare di $(\overline{v}_1 \dots \overline{v}_k)$ con $\alpha_1 \dots \alpha_k$

il vettore $\alpha_1\overline{v}_1 + \dots + \alpha_k\overline{v}_k$.

2) Siano $V(\mathbb{K})$ e $W(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.

Si dice <u>applicazione lineare</u> da $V(\mathbb{K})$ in $W(\mathbb{K})$ una funzione

$$f : V \to W$$

tale che $\forall\, \bar{v}, \bar{u} \in V$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v}).$$

Una applicazione lineare è una funzione che manda combinazioni lineari di vettori in combinazioni lineari con i medesimi coeff.

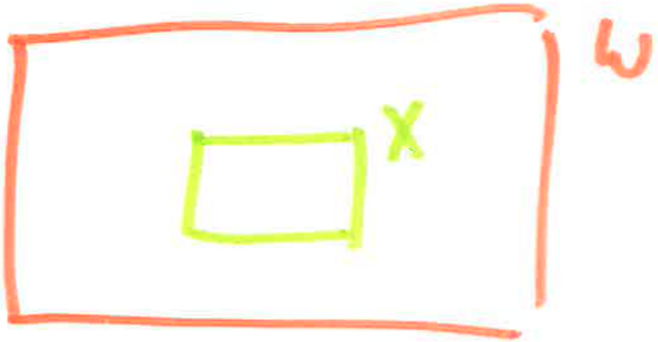
→ Se $V(\mathbb{K})$ è spazio vettoriale e $f : V \to W$ è applicazione lineare ⇒ $f(V)$ immagine di V mediante f è uno spazio vettoriale.

3) Sia $W(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Sia $X \subseteq W$ sottoinsieme. $X \neq \emptyset$

Allora X é detto <u>sottospazio</u> di W se X rispetto le operazioni di somma di vettori di W ristretta ad $X \times X$ e troncata ad X e di prodotto per scalare di W ristretta a $\mathbb{K} \times X$ e troncata ad X soddisfa gli assiomi di spazio vettoriale.

In tale caso scriviamo $X \leq W$.



Restrizione	Troncamento
$+: V \times V \to V$	
$+: X \times X \to V$	$+ \; X \times X \to X$

Restrizione | Troncamento

$\mathbb{K} \times V \longrightarrow V$

$\vdots$

$\mathbb{K} \times X \to V \quad \to \quad \mathbb{K} \times X \to X$

In questo caso la cosa importante è che si possa fare il troncamento, ovvero che applicare le operazioni di prodotto per scalare e somma a vettori in X non ci faccia uscire da X.

X è sottospazio vettoriale se

1) la somma di 2 qualsiasi vettori di X è un vettore di X

2) il prodotto di un qualsiasi vettore di X per uno scalare è ancora un vettore di X.

Teorema: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Allora

1) $\cancel{\text{se}}$ $\forall \bar{v} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ $\alpha \cdot \bar{v} = \underline{0}$ se e solamente se $\alpha = 0$ oppure $\bar{v} = \underline{0}$

2) $\forall \bar{v} \in V$: $(-1) \cdot \bar{v} = -\bar{v}$

DIM: Consideriamo $0 \cdot \bar{v} = (0+0) \cdot \bar{v} = 0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v}$

sommando a dx e sx $-(0 \cdot \bar{v})$ si ottiene

$$\underbrace{-(0\cdot\bar{v})+0\cdot\bar{v}}_{=\,\underline{0}}=\underbrace{-(0\cdot\bar{v})+0\cdot\bar{v}}_{=\,\underline{0}}+0\cdot\bar{v}$$

$$\underline{0} = \underline{0} + 0\cdot\bar{v}$$

$$\Rightarrow 0\cdot\bar{v}=\underline{0}$$

$$\alpha=0 \Rightarrow \alpha\cdot\bar{v}=\underline{0}$$

supponiamo $\alpha\cdot\bar{v}=\underline{0}$ con $\alpha\neq 0$

$\Rightarrow \exists\, \alpha^{-1}\in \mathbb{k}$ e $\alpha^{-1}\cdot(\alpha\bar{v})=\alpha^{-1}\cdot\underline{0}$

$$\alpha^{-1}\cdot(\alpha\bar{v}) = (\alpha^{-1}\alpha)\bar{v} = 1\cdot\bar{v} = \bar{v}$$

$$\alpha^{-1}\cdot\underline{0} = \alpha^{-1}(\underline{0}+\underline{0}) = \alpha^{-1}\underline{0}+\alpha^{-1}\underline{0} = \underline{0}$$

$$\bar{v} = \underline{0}$$

$\alpha^{-1}\cdot\underline{0}=\alpha^{-1}\underline{0}+\alpha^{-1}\underline{0}$ sommando come prima $-(\alpha^{-1}\underline{0})$ a dx e sx

$\alpha^{-1}\underline{0} = \underline{0}$

$\Rightarrow$ in particolare $\bar{v} = \underline{0}$

2) $(-1)\cdot\bar{v} + \bar{v} = (-1)\cdot\bar{v} + 1\cdot\bar{v} = (-1+1)\cdot\bar{v} = 0\cdot\bar{v} =$

$= \underline{0}$

pertanto sommando a dx e sx $(-\bar{v})$ otteniamo

$(-1)\cdot\bar{v} = (-1)\cdot\bar{v} + \bar{v} + (-\bar{v}) = \underline{0} + (-\bar{v}) = -\bar{v}$

$\square$

Teorema $X \leq V(\mathbb{K})$ se e solamente se $X \subseteq V(\mathbb{K})$ ed X è chiuso rispetto le combinazioni lineari di suoi elementi mediante le operazioni di V.

$\rightarrow$ In altre parole $\forall \bar{v}, \bar{w} \in X \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha\bar{v} + \beta\bar{w} \in X$ (*)

<u>OSS</u>: (*) é equivalente a dire

$$(\Delta) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \ \forall \bar{v} \in X : \alpha \bar{v} \in X$$

$$\&$$

$$\forall \bar{v}, \bar{w} \in X : \bar{v} + \bar{w} \in X$$

Verifichiamo che se vale (*)

allora $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \bar{v}, \bar{w} \in X$: $\alpha \bar{v} + \underbrace{\underline{0}}_{= 0 \cdot \bar{w}} = \alpha \bar{v} \in X$

e $\forall \bar{v}, \bar{w} \in X$: $1 \cdot \bar{v} + 1 \cdot \bar{w} = \bar{v} + \bar{w} \in X$.

Viceversa: se vale $(\Delta) \Rightarrow$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{v}, \bar{w} \in X : \alpha \bar{v}, \beta \bar{w} \in X$$

$$\Rightarrow \bar{v}' = \alpha \bar{v}, \ \bar{w}' = \beta \bar{w} \in X \quad \bar{v}' + \bar{w}' \in X$$

$$\Rightarrow \alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in X$$

$\square$

Se vale (*) (oppure Δ che è la stessa cosa)

$\Rightarrow X$ è sottospazio.

osserviamo innanzi tutto che molte delle proprietà di s. vettoriale valgono automaticamente per le restrizioni applicate a qualsiasi $X \subseteq V(\mathbb{K})$.

1) Se $\forall \bar{v} \in V : 1 \cdot \bar{v} = \bar{v} \Rightarrow \forall \bar{v} \in X : 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$

2) Se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \; \forall \bar{v} \in V : (\alpha\beta)\bar{v} = \alpha(\beta\bar{v}) \Rightarrow$

vale anche $\forall \bar{v} \in X$.

3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{v} \in V : (\alpha + \beta)\bar{v} = \alpha\bar{v} + \beta\bar{v}$

4) $\forall \bar{v}, \bar{w} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha(\bar{v} + \bar{w}) = \alpha\bar{v} + \alpha\bar{w}$

valgono tutte anche sulle restrizioni.

Vale anche sulle restrizioni che

$\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V : \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} \Rightarrow$

$\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in X : \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$

e similmente

$\forall \bar{u}, \bar{v} \in V : \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{w} \Rightarrow \forall \bar{u}, \bar{v} \in X : \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{w}.$

Cosa potrebbe non funzionare?

a) $\underline{0} \in X$

b) $\forall \bar{u}, \bar{v} \in X : \bar{u} + \bar{v} \in X$

c) $(-\bar{u}) \in X$ se $\bar{u} \in X$

d) $\alpha \bar{u} \in X$ se $\bar{u} \in X \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$

(a, b, c:) $(X, +)$ é gruppo abeliano

se valgono a, b, c, d $\Rightarrow$ possiamo troncare le operazioni ad $X \Rightarrow$ abbiamo un sottospazio.

b + d $\Rightarrow$ si può troncare a + b + c $\Rightarrow$ $(X, +)$ gruppo.

Se vale la condizione (*)

$$\boxed{(*): \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \forall \bar{u}, \bar{v} \in X: \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in X}$$

$\Rightarrow$ a) $0 \cdot \bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0} \in X$

b) $1 \cdot \bar{u} + 1 \cdot \bar{v} = \bar{u} + \bar{v} \in X \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in X.$

c) $(-1) \cdot \bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = -\bar{u} + \underline{0} = -\bar{u} \in X \quad \forall \bar{u} \in X$

d) $\alpha \bar{u} + 0 \cdot \bar{v} = \alpha \bar{u} + \underline{0} = \alpha \bar{u} \in X \quad \forall \bar{u} \in X$

X é un sottospazio.

Viceversa: se X sottospazio $\Rightarrow$ ogni c. lineare di suoi vettori deve stare in $X \Rightarrow$ vale (*) $\square$

Esempi

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$.

somma e prodotto componente per componente

$X = \{(0,0)\}$ è sottospazio.

$\alpha(0,0) + \beta(0,0) = (0,0) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

vale (*).

$\mathbb{R}^2$ è sottospazio di se stesso.

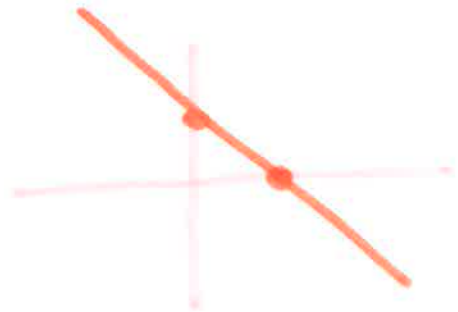
(vale (*) per def. di s. vettoriale).

Per ogni spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$, gli insiemi $\{\underline{0}\}$ e

$V(\mathbb{K})$ sono sempre sottospazi

$\downarrow$

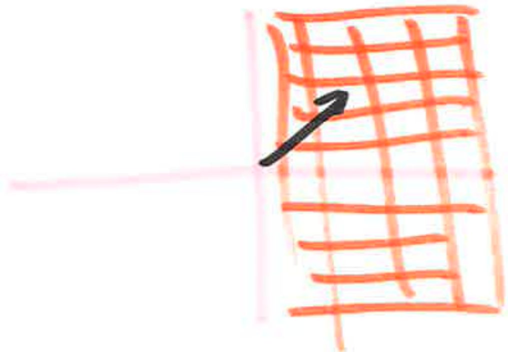
sottospazi banali



$X = \{(a,b) \mid a+b=1\}$.

$(0,0) \notin X \Rightarrow \underline{0} \notin X$ possiamo dire subito che X non è sottospazio vettoriale.

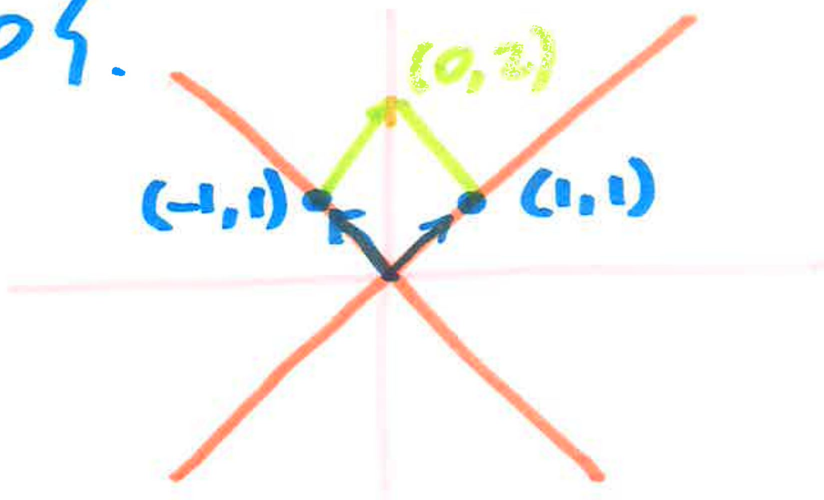
$X = \{(a,b) \mid a \geq 0\}$ $\underline{0} \in X$ però



$(1,0) \in X$ e $(-1,0) \notin X$

$\Rightarrow X$ non è sottospazio vettoriale

$X = \{(a,b) \mid a^2 - b^2 = 0\}$.



$(a^2-b^2)=0 \iff$

$(a+b)(a-b)=0 \iff$

$(a+b)=0$ oppure $(a-b)=0$

1) $\underline{0} \in X$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \forall \bar{v} \in X$

$\alpha \bar{v} \in X$

infatti se (a,b) é ~~[illegible]~~ tale che $a^2-b^2=0$

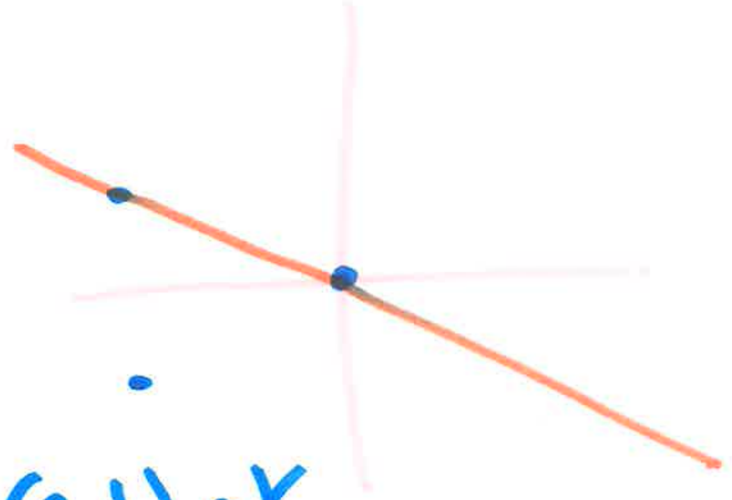
$\Rightarrow$ $(\alpha a, \alpha b)$ è tale che

$\alpha^2 a^2 - \alpha^2 b^2 = \alpha^2(a^2-b^2)=0$

Non è vero che $(a,b),(c,d) \in X \Rightarrow (a,b)+(c,d) \in X$

$(-1,1)+(1,1) = (0,2) \notin X$

$X = \{(a,b) \mid a+2b=0\}.$



siano $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(a,b), (c,d) \in X$

$$a+2b=0$$
$$c+2d=0$$

$\rightarrow$ prendiamo $\alpha(a,b)+\beta(c,d) =$

$$= (\alpha a+\beta c, \alpha b+\beta d)$$

$$(\alpha a+\beta c) + 2(\alpha b+\beta d) =$$

$$\alpha(a+2b)+\beta(c+2d) = \alpha\cdot 0+\beta\cdot 0 = 0$$

In $\mathbb{K}[x]$ consideriamo $\mathbb{K}[x]_n$

N.B: $\mathbb{K}[x]_n$ = polinomi di grado $\leq n$

$\Rightarrow$ sottospazio di $\mathbb{K}[x]$

$X = \{ f(x) \in \mathbb{K}[x] \mid \text{con } \deg f = n \}$

NON È SOTTOSPAZIO! $\underline{0} \notin X$

Sia $Y = \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b = a^2 \}$ con

l'operazione $+ : Y \times Y \to Y$

$(a, a^2), (b, b^2) \to (a+b, (a+b)^2)$

$\cdot) \; \mathbb{R} \times Y \to Y$

$\alpha, (a, a^2) \longrightarrow (\alpha a, \alpha^2 a^2)$.

1) Y é spazio vettoriale? Sì!

2) Y é sottospazio di $\mathbb{R}^2$? No!

Le operazioni di Y non sono quelle "ereditate" da $\mathbb{R}^2$

Regole "euristiche" per riconoscere se un sottoinsieme descritto da equazioni sia un sottospazio.

1) Un sottoinsieme X di $\mathbb{K}^n$ descritto da un sistema di equazioni lineare (= 1° grado) e omogeneo (= termini noti tutti 0) è sottospazio vettoriale.

2) Un sottoinsieme X di $\mathbb{K}^n$ descritto da un sistema di equazioni$^{\text{lin.}}$ non omogeneo non è sottospazio vettoriale. → NON CONTIENE $\underline{0}$.

3) In generale (ma non sempre) un sottoinsieme descritto da un sistema di equazioni di grado > 1 non é un sottospazio.
[però ci possono essere casi in cui lo è].

$X = \{(a,b) \mid a^2 + 2ab + b^2 = 0\}$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

é sottospazio

$$\| \\ \{(a,b) \mid (a+b)^2 = 0\} = \{(a,b) \mid a+b = 0\}$$

$$Y = \{(a,b) \mid a^2 + b^2 = 0\} \begin{cases} Y \leq \mathbb{R}^2 \\ Y \not\leq \mathbb{C}^2 \end{cases}$$

Se Y visto come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$$a^2+b^2=0 \Rightarrow a=b=0$$

$$\Rightarrow Y=\{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

se Y visto come sottoinsieme di $\mathbb{C}^2$

$$\Rightarrow a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)$$

$$Y=\{(a,b)\in\mathbb{C}^2 \mid (a+ib)(a-ib)=0\}=$$

$$=\{(a,b)\in\mathbb{C}^2 \mid a+ib=0\} \cup \{(a,b)\in\mathbb{C}^2 \mid a-ib=0\}$$

$$(1,i) \qquad\qquad (1,-i)$$

$$\underbrace{(1,i)}_{\in Y}+\underbrace{(1,-i)}_{\in Y}=(2,0)\notin Y \Rightarrow Y \text{ non è sottospazio } \square$$