Determinanti

$A = ((a_{ij})) \in \mathbb{K}^{n,n}$ quadrata

$\forall j \in \{1 \dots n\}$ definiamo

$$\det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

ove A_{ij} = matrice che si ottiene da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

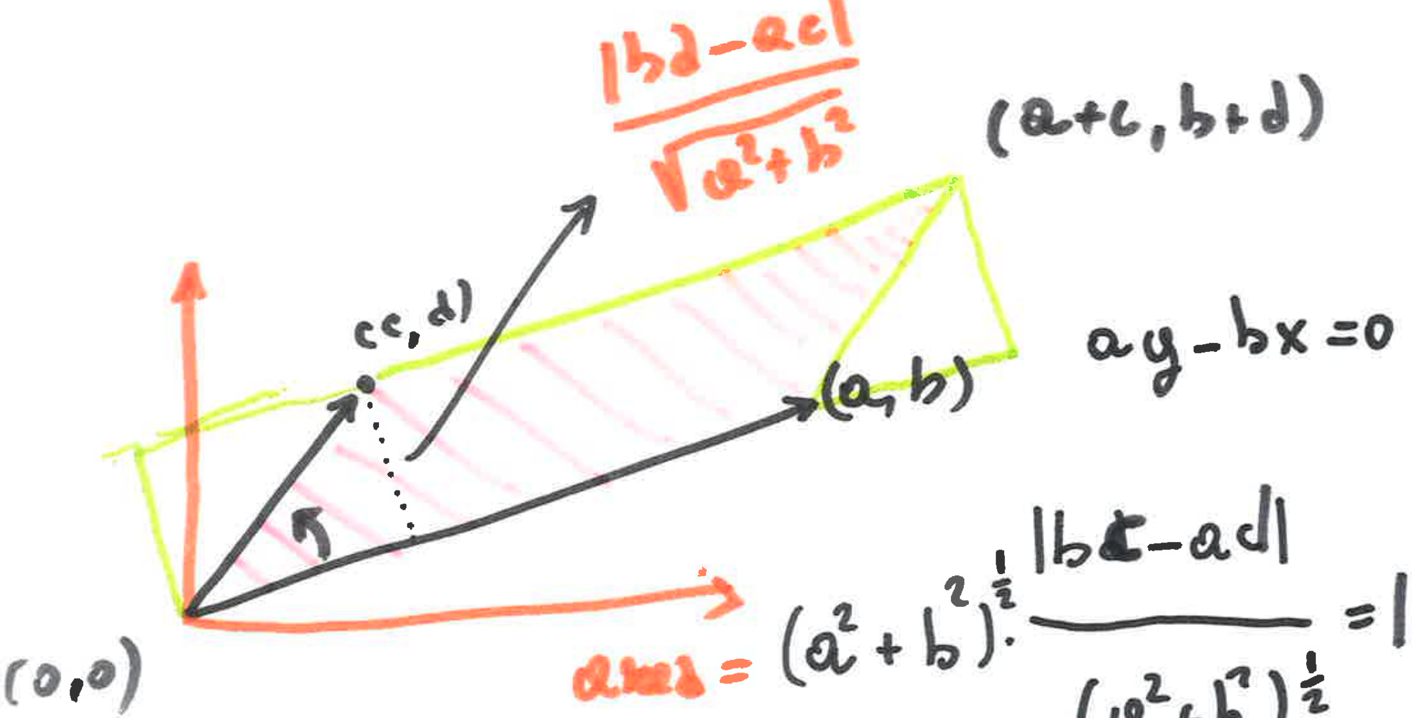
se $n = 1$ $\quad \det((a_{11})) = a_{11}$.

Teorema

1) $\det(A)$ non dipende dalla scelta di j
2) $\det({}^tA) = \det(A)$ (det. per righe = det. per colonne)

3) Se $A, B \in \mathbb{K}^{n,n} \Rightarrow \det(AB) = \det(A)\det(B)$

$$d(P,r) = \frac{|ax_p+by_p+c|}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad r: ax+by+c=0$$

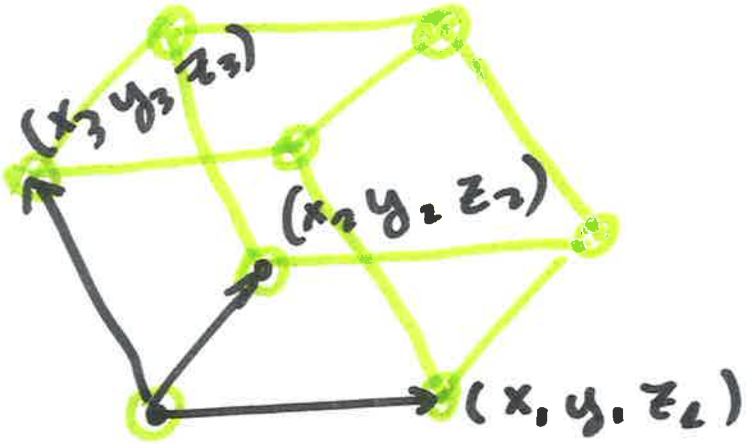


$$\text{area} = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{|bc-ad|}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} = |bc-ad|$$

$$= \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right|$$

Verificare che det di una matrice 3x3 corrisponde al volume di un prisma definito dai 3 punti dati (orientato)

$$V = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$



I riga

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

I colonna

$$= 1 \cdot 2 \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \\ 9 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 9 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

espandere per colonne

Regole "di manipolazione":

1) $\det(I_n) = 1$

2) se in una matrice ci sono 2 righe (colonne) uguali $\Rightarrow$ il det è uguale a zero.

3) Se ad una riga/~~de~~ colonna di una matrice aggiungiamo una altra (riga/colonna) $\Rightarrow$

$$\det(A') = \det(A) + \det(A'')$$

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \qquad A'' = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_i' \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_i + R_i' \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&1&0\\1&4&6&5\\0&7&3&2\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&0&0\\1&4&6&5\\0&7&3&2\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&0&1&0\\1&4&6&5\\0&7&3&2\end{pmatrix}$$

4) Se si moltiplica una riga/colonna per uno scalare a $\Rightarrow$ il determinante viene moltiplicato per a.

1–4 $\Rightarrow \exists!$ funzione con le prop. del determinante $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$.

5) Se in una matrice si scambiano fra loro 2 righe o 2 colonne $\Rightarrow$ il det cambia di segno

6) Se ad una riga/colonna si somma una c. lineare delle righe/colonne rimanenti allora il det non cambia.

N.B: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale

$\overline{v}_1, \overline{v}_2 \dots \overline{v}_n \in V(\mathbb{K})$ vettori $\quad \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ scalari

Si dice combinazione lineare dei vettori $\overline{v}_1 \dots \overline{v}_n$ con gli scalari $\alpha_1 \dots \alpha_n$ il vettore

$$\alpha_1 \overline{v}_1 + \alpha_2 \overline{v}_2 + \dots + \alpha_n \overline{v}_n \in V(\mathbb{K})$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 3-2 = 1$$

ALGORITMO DI GAUSS

0) $d = 1$

1) Se la matrice A contiene una riga/colonna di zeri $\Rightarrow$
$\det(A) = 0 \to$ fine.

2) Se l'entrata più in alto a sx è zero ma c'è sotto di essa una entrata non nulla $\Rightarrow$ scambiamo la prima riga con l'entrata non nulla e poniamo $d \leftarrow d \cdot (-1)$

3) Dividiamo la prima riga per il valore μ della sua prima entrata e poniamo $d \leftarrow d \cdot (\mu)$

4) Da ogni riga successiva la prima sottraiamo un multiplo della prima riga per l'entrata iniziale di questa riga.

→ otteniamo una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} 1 & \text{---} \\ 0 & \\ 0 & M' \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

5) restituiamo come risultato $d \cdot \det(M')$ con M' minore ottenuto cancellando la prima riga e la prima colonna.

MATRICI INVERTIBILI E MATRICE INVERSA DI UNA MATRICE INVERTIBILE.

II Teorema di Laplace

Sia $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{K}^{n,n}$

Allora

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ik}| = \begin{cases} \boxed{\det A \text{ se } j = k} \\ 0 \quad \text{se } j \neq k \end{cases}$$

dal teorema di Laplace

DIM

(esempio che la illustra)

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \\ 9 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow_j & \quad & \uparrow_k & \quad \end{array} \end{array}$$

$j = 1, \; k = 3$

$$\sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} a_{i1} \left| A_{i3} \right| =$$

k

$$= 1 \begin{vmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 9 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot 0$$

$$+ 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \\ 9 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

la colonna i-esima è ripetuta 2 volte

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 9 & 9 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 9 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

CALCOLARE $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ik}|$ con $j \neq k$

corrisponde a calcolare il determinante di una matrice con 2 colonne uguali (la colonna j ripetuta 2 volte!)

$\Rightarrow$ esso è zero! $\square$

Def: Sia $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{K}^{n,n}$. poniamo

$$\Gamma_{ij} := (-1)^{i+j} |A_{ij}| \leftarrow \text{complemento algebrico di } (i,j)$$

$$A^a = {}^t((\Gamma_{ij}))$$ AGGIUNTA ALGEBRICA DI A.

Teorema $\quad A \cdot A^a = \det(A) \cdot I_n$

In particolare se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$

$$\boxed{A^{-1} := \frac{1}{\det A} A^a}$$

DIM: $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^a = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \dots & \Gamma_{n1} \\ \Gamma_{12} & & \vdots \\ \vdots & & \\ \Gamma_{1n} & & \Gamma_{nn} \end{pmatrix}$

$B = AA^a$ e osserviamo che

$$b_{ij} = (a_{i1} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} \Gamma_{j1} \\ \vdots \\ \Gamma_{jn} \end{pmatrix}$$

i esima riga di A

j-esima colonna di A^a

$$b_{ij} = a_{i1}\Gamma_{j1} + a_{i2}\Gamma_{j2} + \dots + a_{in}\Gamma_{jn} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Gamma_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ik} |A_{jk}|$$

per il II teorema di Laplase.

1) se $j = i \Rightarrow b_{ij} = b_{ii} = \det A$

2) se $j \neq i \Rightarrow b_{ij} = 0$

$$\Rightarrow A A^{a} = \begin{pmatrix} \det A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det A \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ se $\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} := \frac{1}{\det A} A^{a}$ e' tale che

$$AA^{-1} = I_n \Rightarrow A \text{ è invertibile}$$

(es. vedere che anche $A^{-1}A = I_n$). $\square$

<u>OSS</u>: Se A è invertibile $\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) =$

$$= \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$.

CONSEGUENZA IMPORTANTE

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è invertibile

$\Leftrightarrow$ la matrice ha $\det(A) \neq 0$

In tale caso un modo per calcolare l'inversa è determinare $A^a \cdot \frac{1}{\det A} = A^{-1}$.

IDEA BASE METODO DI GAUSS PER INVERTIRE UNA MATRICE

1) Definiamo come op. elementari su di una matrice

   a) Scambiare una riga con un'altra riga
   b) Moltiplicare una riga per uno scalare $\neq 0$
   c) Sommare una riga ad un'altra riga.

2) OSSERVIAMO CHE SE UNA MATRICE A È INVERTIBILE
   $\Rightarrow$ È SEMPRE POSSIBILE PASSARE DA A alla matrice IDENTICA I MEDIANTE OPERAZIONI ELEMENTARI.

3) Per invertire una matrice col metodo di GAUSS scriviamo la matrice stessa ed accanto una copia

della matrice identica.

Eseguiamo le medesime operazioni elem. sulla matrice data e su quella identica per portare la matrice data in I_n.

ALLA FINE OTTENIAMO

$$\begin{array}{ccc} A & \qquad & I_n \\ \vdots & & \vdots \\ BA = I_n & & BI_n = B \end{array}$$

$\Rightarrow B$ è la matrice inversa di A

e a dx si ha esattamente essa.