Algebra Lineare e Geometria Analitica

→ studio della teoria degli spazi vettoriali e dei sistemi lineari (e loro trasformazioni)

sistemi di m equazioni in n incognite di I grado.

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ x \quad - z + 5 = 0 \end{cases}$$

→ AMMETTE SOLUZIONE?
se sì QUALI

ALGEBRA → studio di "enti" e loro trasformazioni
ALGEBRA LINEARE → studio di enti legati ai sistemi lineari.
GEOMETRIA ANALITICA → applicazione dell'algebra (lineare).

Richiami di teoria degli insiemi (ingenua) e notazioni.

→ INSIEME: collezione di oggetti [1] senza ripetizioni e [2] non ordinata da cui [3] si può sempre selezionare un qualsivoglia elemento.

$$\{a,b,c\} = \{a,c,b\} = \{a,a,b,c,c,c\}.$$

CARDINALITÁ DI UN INSIEME = numero dei suoi elementi.

Se X insieme $|X|$ = numero dei suoi elementi.

predicato di appartenenza:

APPARTIENE $x \in X$ se x é elemento di X

NON APPARTIENE $x \notin X$ se x non é elemento di X

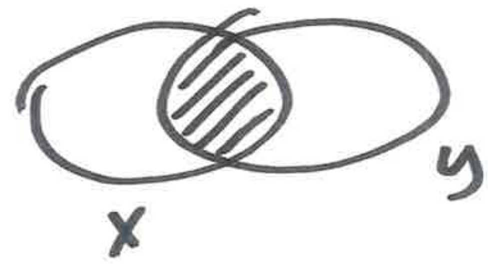
possiamo anche dato un insieme X prendere $x \in X$

operazioni fra insiemi e connettivi logici.

Siano X, Y due insiemi.

$$X \cap Y = \{ x \in X \mid x \in Y \}.$$

tali che



$$z \in X \cap Y \iff z \in X \ \& \ z \in Y$$

se e solamente se

congiunzione: "e"

equivalente a dire

$$z \in X \cap Y \Rightarrow z \in X \ \& \ z \in Y$$

&

$$z \in X \ \& \ z \in Y \Rightarrow z \in X \cap Y$$

<u>OSS</u>:

$\boxed{a \Rightarrow b}$ significa che "ogni volta che si verifica a, b è vero".

↓

<u>NON COMPORTA CAUSAZIONE</u>

si può riscrivere come

$\boxed{(\neg a \lor b)}$ "non a oppure b"

$\Rightarrow$

a	b	$\Rightarrow$
V	V	V
F	F	V
F	V	V
V	F	F

← non è vera l'implicazione

a	$\neg a$
V	F
F	V

a	b	$\lor$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

OGNI OPERAZIONE LOGICA SI PUÓ RIDURRE IN TERMINI DI $\&$, $\vee$, $\neg$ (and, or, not).

$\downarrow$

OGNI OPERAZIONE LOGICA SI PUÓ RIDURRE IN TERMINI DI & (rappresentata anche con $\cdot$)

E DI $\oplus$ XOR CHE É L'OP.

a	b	$\oplus$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

V = 1

F = 0

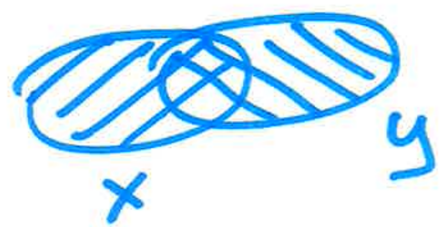
É possibile rappresentare <u>qualsiasi programma</u> mediante un polinomio ~~nei punti~~ con le op. "&", "$\oplus$" e un certo numero di variabili e costanti V, F.

Unione di insiemi

X, Y due insiemi

~~[illegible]~~ $X \cup Y$ é l'insieme tale che

$z \in X \cup Y \iff z \in X \lor z \in Y$.



NOZIONE DI COPPIA ORDINATA.

→ "Lista" di 2 oggetti" in cui ci possono essere ripetizioni e l'ordine é rilevante.

$(a, b) \neq (b, a) \neq (a, a) \neq (b, b)$.

$(a, b) := \{ a, \{a, b\}\}$.

$(a,a) = \{a, \{a\}\}. \neq a$

$(a,b) = \{a, \{a,b\}\}$

$(b,a) = \{b, \{a,b\}\}$

$(a,b) = (b,a) \iff a = b$

DATI X, Y insiemi definiamo

$$X \times Y := \{ (x,y) \mid x \in X, y \in Y \}.$$

↑ prodotto cartesiano.

Relazione R fra X ed Y è un sottoinsieme

$$R \subseteq X \times Y$$

R è detta ~~fran~~ <u>relazione funzionale</u> fra X ed Y

se $\quad \forall x \in X \ \exists$ al più un $y \in Y$ tale

che $\quad (x,y) \in R$.

è detta <u>funzione</u> se

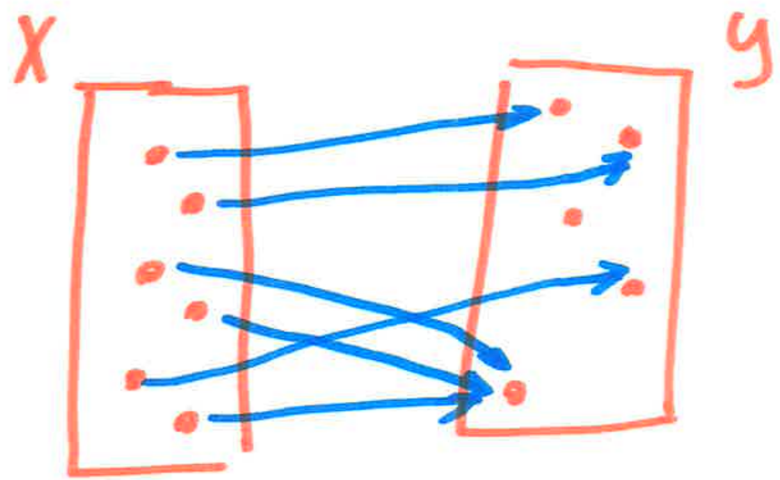
$$\forall x \in X \, \exists! \, y \in Y : (x,y) \in R$$

$\forall$: per ogni

$\exists$: esiste

$\exists!$: esiste uno ed uno solo

$\exists_{\leq 1}$: esiste al più uno.



R : <u>funzione</u> fra X ed Y

scriveremo anche $R : X \to Y$

"ad ogni elemento di X associamo un elemento di Y"

$$X \xrightarrow{R} Y$$

e dato $x \in X$ scriveremo $R(x) = y$

per dire $(x, y) \in R$.

$x \circ R$ $\oplus$ $\forall$

<u>OSS</u>

X è detto <u>dominio</u> di R

Y è detto <u>codominio</u> di R

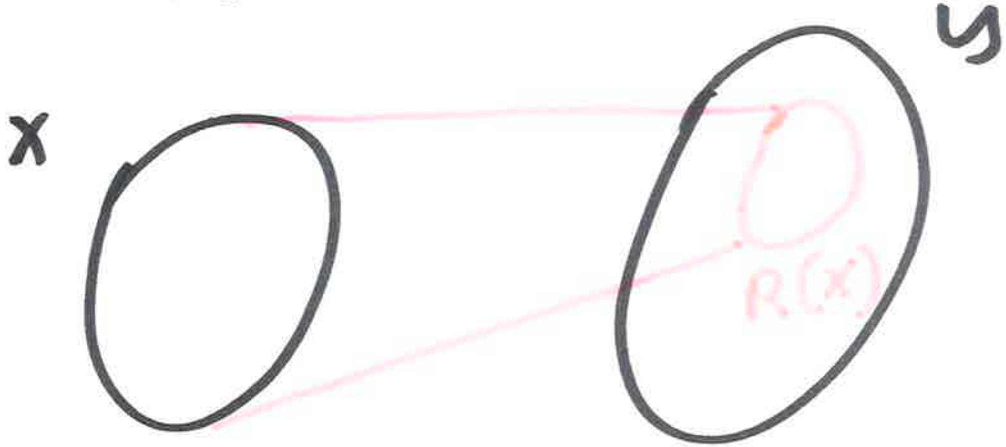
ad ogni elemento del dominio corrisponde esattamente un elemento del codominio.

N.B. $R(X) := \{ y \in Y \mid \exists x \in X : R(x) = y \}$

è detta <u>immagine</u> di R

In generale $R(X) \subseteq Y$

ma $R(X) \neq Y$



<u>Def</u>: Sia $f : X \to Y$ una funzione e

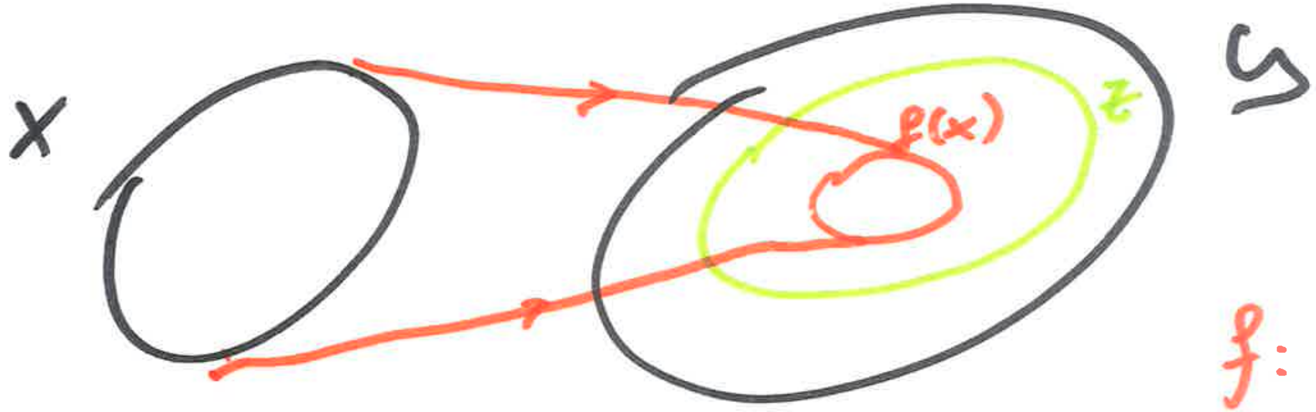
$f(X) \subseteq Z \subseteq Y$ (Z contiene l'immagine di f)

~~si dice restrizione di f a Z~~

si dice troncamento di f a Z la funzione

$f^{|Z} : X \to Z$ e tale che

$\forall x \in X : f^{|Z}(x) = f(x).$



codominio Y

$f : X \to Y$

$f^{|Z} : X \to Z$

codominio Z

Sia $W \subseteq X$ e $f : X \to Y$ funzione.

Si dice restrizione di f a W $f_{|W} : W \to Y$

tale che $f_W = \{(x,y) \in f \mid x \in W\}.$

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE

1) $f(x) \begin{cases} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ x \longrightarrow 2x \end{cases}$

2) $f_{|\mathbb{Z}} : \begin{cases} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ x \longrightarrow 2x \end{cases}$

$$f_{|\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

3) $f_{|\mathbb{Z}}^{|\mathbb{Z}} : \begin{cases} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x \longrightarrow 2x \end{cases}$

4) $f_{|\mathbb{Z}}^{|2\mathbb{Z}} : \begin{cases} \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z} \\ x \longrightarrow 2x \end{cases}$

insieme di:

$\mathbb{Q}$ = numeri razionali

$\mathbb{Z}$ = numeri interi

$\mathbb{N}$ = numeri naturali escluso 0

$\mathbb{N}_0$ = numeri naturali incluso 0.

$\mathbb{R}$ = numeri reali

$\mathbb{C}$ = numeri complessi

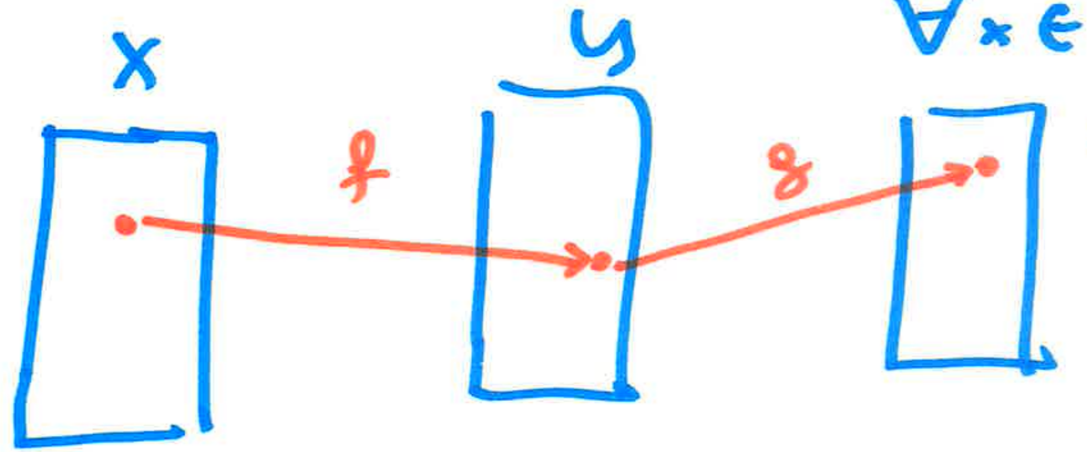
$$f_{|\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Siano $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ due funzioni

si dice COMPOSIZIONE DI f e g

$g \circ f: X \to Z$ data da $g(f(x)) = g \circ f(x)$ $\forall x \in X$



$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

$(g \circ f) := \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x,y) \in f \,\&\, (y,z) \in g\}.$

N.B: il dominio di g deve essere il codominio di f !!

<u>OSS:</u> Siano $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to W$ funzioni

$$h \circ (g \circ f) : X \to W$$
$$x \to h(\underbrace{g(f(x))}_{})$$

$$\underbrace{(h \circ g)}_{} \circ f : X \to W$$
$$x \to \underbrace{(h \circ g)}_{}(f(x)) = $$
$$= h(g(f(x)))$$

PROPRIETÁ ASSOCIATIVA DELLA COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Sia $f: X \to Y$ una funzione

$f \subseteq X \times Y$.

Si dice ~~$f^{opp} \subseteq Y \times X \{(y,x) \mid (x,y) \in f\}$~~

$$f^{opp} = \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in f\}.$$

se f funzione $\Rightarrow f^{opp}$ può essere anche solo una <u>relazione</u>

$$f: \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ x \to 2x \end{cases}$$

$\{(x, 2x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Z}\}. = f$

$\{(2x, x) \mid x \in \mathbb{Z}\} = f^{opp}.$

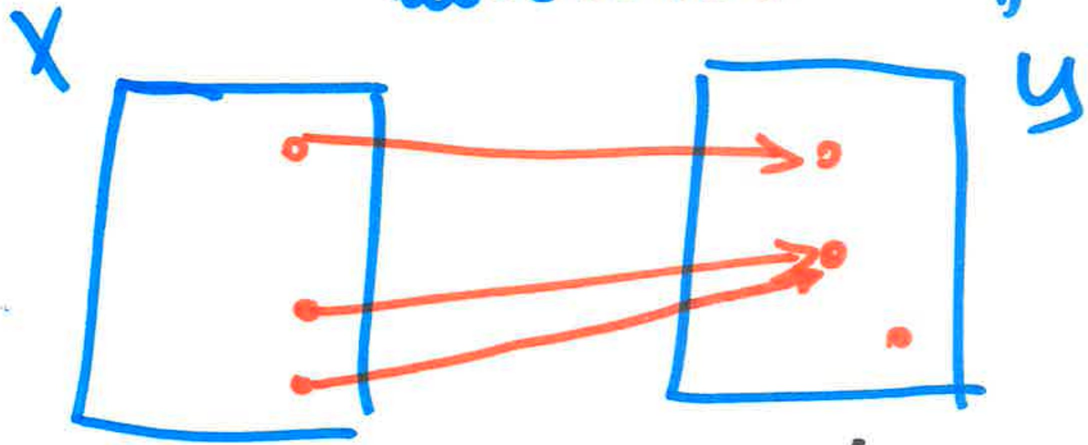
ci sono elementi di $\mathbb{Z}$ che non hanno immagine.

$$g: \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ x \to x^2 \end{cases} \qquad \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

$$g^{opp} \qquad \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

MA NOTIAMO CHE $(1,1) \in g^{opp}$
$(+1,-1) \in g^{opp}$.

QUINDI g^{opp} non è nemmeno una relazione funzionale.



Si dice preimmagine di $y \in Y$ ogni $x \in X$: $f(x) = y$

Affinché data $f: X \to Y$ la relazione

$f^{opp} \subseteq Y \times X$ sia funzionale

serve che **1)** ad ogni elemento di Y in $f(X)$ corrisponda un solo elemento di X

[ad ogni elemento di Y corrisponda al più un elemento di X]

$x_1 \leftarrow y \rightarrow x_2$ <u>No</u>

f è iniettiva.

<u>funzione</u>: **2)** ad ogni elemento di Y corrisponda <u>almeno</u> un elemento di X

f è suriettiva.

$\not\leftarrow y$

Def: $f \subseteq X \times Y$ $\quad f: X \to Y$ suriettiva $\iff$

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y$$

← esiste almeno.

iniettiva $\iff$

$$\forall y \in Y \ \exists_{\leq 1} x \in X : f(x) = y$$

← esiste al più

biiettiva $\iff$

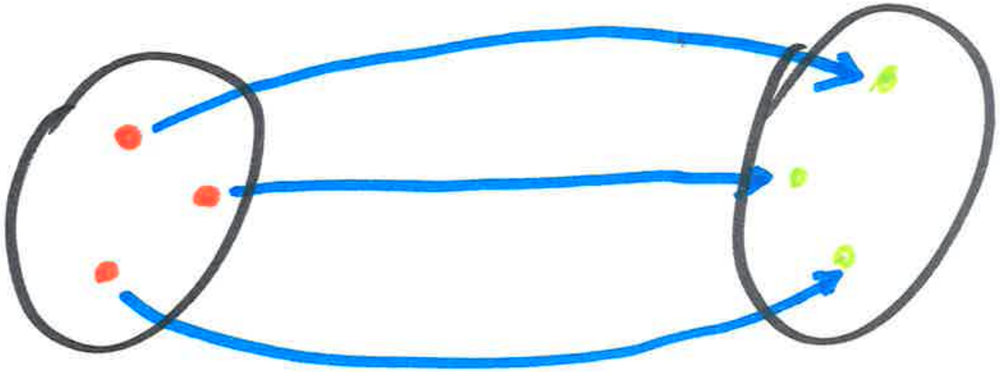
$$\forall y \in Y \ \exists! x \in X : f(x) = y$$

← esiste esattamente

OSS: 1) $f^{opp}: Y \to X$ funzione $\iff$ f biiettiva

2) f biiettiva $\iff$ f é "uno ad uno"

3) Se $\exists\, f: X \to Y$ biiettiva, allora diciamo $|X| = |Y|$



$$f \begin{cases} \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z} \\ x \longrightarrow 2x \end{cases}$$

f è biiettiva $\quad 2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$

iniettiva: supponiamo $f(x) = f(y) \Rightarrow$

$2x = 2y \Rightarrow x = y$

suriettiva: sia $\alpha \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = 2\beta,\ \beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\alpha = f(\beta)$.

l'insieme $\mathbb{Z}$ ha lo stesso numero di elementi di $2\mathbb{Z}$ anche se $2\mathbb{Z}$ è "più piccolo" di $\mathbb{Z}$.

- $\mathbb{Z}$ è un insieme infinito.

Def: Si dice che un insieme X è infinito $\iff \exists\, Y \subsetneq X$, $Y \neq X$ ed una funzione $f: X \to Y$ biiettiva.

esiste una "gerarchia" di infiniti

diciamo che 2 insiemi hanno la stessa cardinalità (infinita) se $\exists$ una biiezione fra essi.

$$\underbrace{|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|}_{\text{numerabili}} < \underbrace{|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|}_{\text{potenza del continuo.}}$$

---

f^{opp} che cosa è quando f è una funzione biiettiva?

$f : X \to Y$ biiettiva $\Leftrightarrow$ f^{opp} è una funzione $Y \to X$

$f : X \to Y$

$$(f^{opp} \circ f) = \{(x_1, x_2) \mid \exists (x_1, y) \in f \text{ e } (y, x_2) \in f^{opp}\}.$$

$f^{opp} \circ f : X \to X$

$$(f^{opp} \circ f) = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid (x_1, y) \in f,\ (y, x_2) \in f^{opp}\} =$$

$$= \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid (x_1, y) \in f,\ (x_2, y) \in f\}.$$

ma f biiettiva (e quindi iniettiva).

$(x_1, y) \in f$ & $(x_2, y) \in f \Rightarrow x_1 = x_2$

$$= \{(x, x) \in X \times X\}. = \iota_X$$ funzione identica su X

$(f \circ f^{opp}) : Y \to Y$

in modo analogo si fa vedere che

è $\{(y, y) \in Y \times Y\}. = \iota_Y$ funzione identica su Y.

Diciamo che in questo caso $f^{opp} = f^{-1}$

<u>funzione inversa</u> di f

$$f : X \to Y$$

$$f^{-1} : Y \to X$$

tale che $(f \circ f^{-1}) : Y \to Y = \iota_Y$

$$(f^{-1} \circ f) : X \to X = \iota_X$$