Valori di k tali che polare di (1 1) rispetto

$\mathcal{C}$ $\quad A = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$ sia $y = -\frac{1}{2}$

$$(1\ 1\ 1)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (k\ \ 1\ \ k+1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$kx + y + (k+1) = 0$$

questa retta deve essere $y + \frac{1}{2} = 0$

$$rk \begin{pmatrix} k & 1 & k+1 \\ 0 & 1 & +\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1$$

MAI $\quad k=0$ ma det minore $2 \times 2 \neq 0$

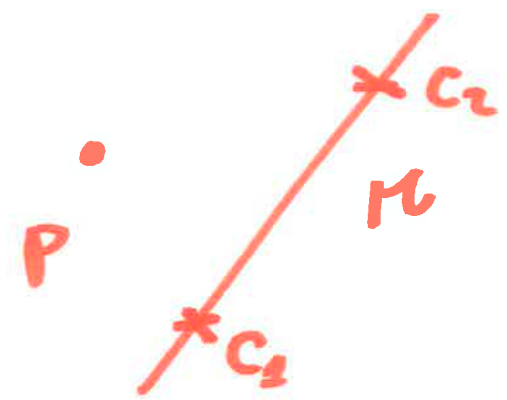
polare di $(1,1)$ $\quad y=-1$

$y=-\frac{1}{2}$

$$rk\begin{pmatrix} k & 1 & k+1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$k=0$

$$\begin{cases} (1\,1\,1)\,A\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ (1\,1\,1)\,A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$



$$[0\,2\,1]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2a_{12}+a_{13} & 2a_{22}+a_{23} & 2a_{23}+a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$[0\,1\,1]A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left(a_{12}+a_{13},\ a_{22}+a_{23},\ a_{23}+a_{33}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(2+i \quad 1\pm i \quad 0)\,A\begin{pmatrix} 2\pm i \\ 1\pm i \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \left[a_{11}(2\pm i)+(1\pm i)a_{12} \quad a_{12}(2\pm i)+(1\pm i)a_{22} \quad a_{13}(2\pm i)+a_{23}(1\pm i)\right]\begin{pmatrix} 2\pm i \\ 1\pm i \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$4a_{22}+2a_{23}+2a_{23}+a_{33}=0$$

(1) $4a_{22}+4a_{23}+a_{33}=0$

$$(a_{22}+a_{23})+(a_{23}+a_{33})=0$$

(2) $a_{22}+2a_{23}+a_{33}=0$

(3) $\left[a_{12}(2+i)+a_{22}(1+i)\right](1+i)+\left[a_{11}(2+i)+(1+i)a_{12}\right](2+i)=0$

$$2(1+i)(2+i)a_{12}+(1+i)^2a_{22}+(2+i)^2a_{11}=0$$

$$2(1+3i)a_{12}+(2i)a_{22}+(3+4i)a_{11}=0$$

$\lceil 2a_{12}+3a_{11}=0 \rfloor$ $\lceil 3a_{12}+2a_{22}+4a_{11}=0 \rfloor$

$$\tilde{A} = \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{22} & a_{23} & a_{33} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

matrice del sistema. $\qquad$ a_{13} è libero.

$a_{33} = -4(a_{22} + a_{23})$ $\qquad$ $-4a_{22} - 4a_{23} = -a_{22} - 2a_{23}$

$a_{33} = -1(a_{22} + 2a_{23})$ $\qquad$ $-2a_{22} - 3a_{23} = 0$

$a_{22} = \frac{3}{2} a_{23}$

$a_{22} =$ $\qquad$ $a_{33} = -4 \cdot \frac{5}{2} = -10$

e continuando si trovano t. i coeff.

Conica in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ per i punti

$$P = [(0\ 2\ 1)] \qquad Q = [(2+i\ \ 1+i\ \ 0)] \qquad R = [(0\ 1\ 1)]$$

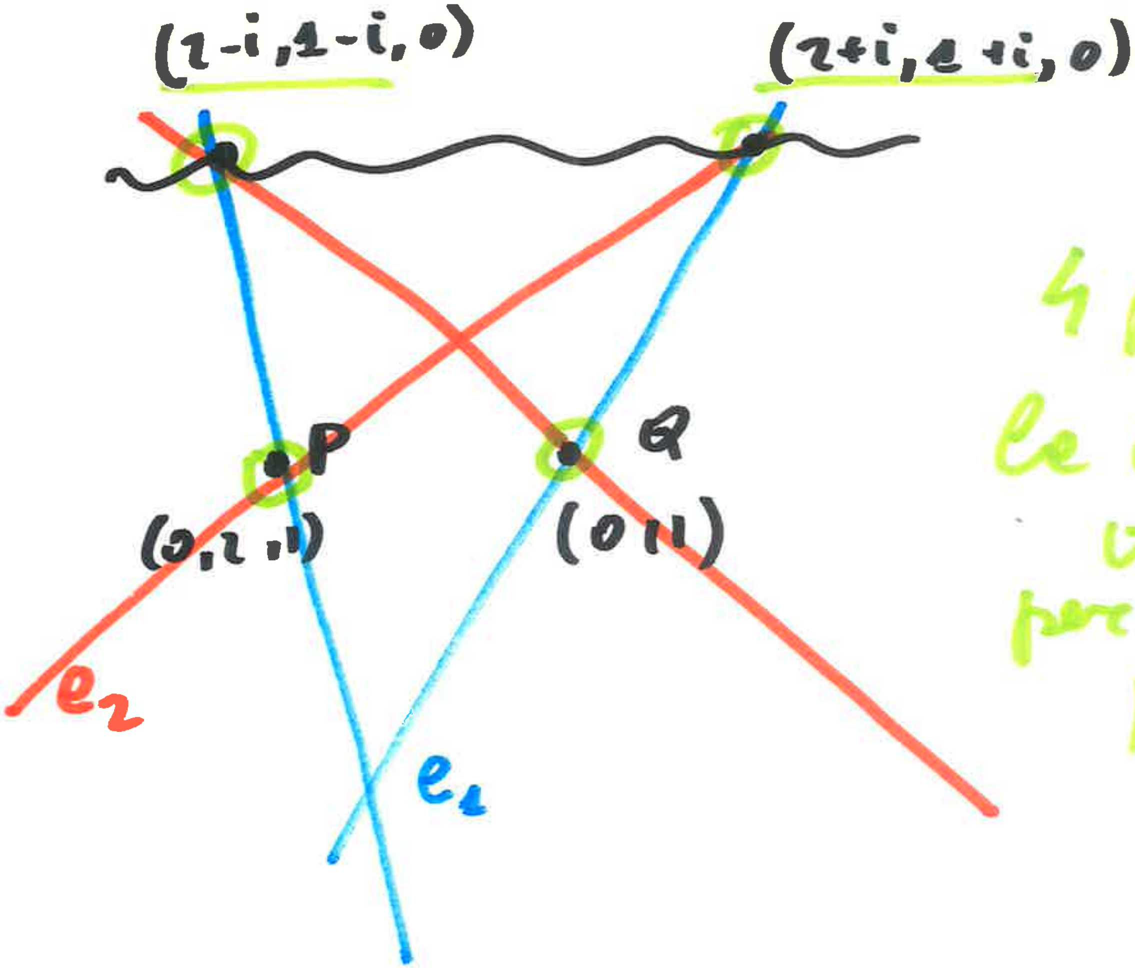
P ed R sono punti reali $[(2+i\ \ 1+i\ \ 0)]$ immaginario

$[(2-i\ \ 1-i\ \ 0)]$

$$\begin{vmatrix} 2+i & 1+i \\ 2-i & 1-i \end{vmatrix} = (2+i)(1-i) - (1+i)(2-i) = \cancel{3}-i - \cancel{2}-\cancel{1}-i \neq 0$$

1) In particolare la conica deve passare per P, Q R ed anche $\overline{Q}$ perché è una curva reale.

2) Ha punti impropri imm. e coniugati $\Rightarrow$ è una ellisse.



4 punti

le coniche sono ∞^5, per 4 punti $\boxed{\infty^1}$

e_1: $[(i-1)x_1 + (2-i)(x_2 - 2x_3)]\,[(-1-i)x_1 + (2+i)(x_2 - x_3)] = 0$

e_2: $[(i-1)x_1 + (2-i)(x_2 - x_3)]\,[(-1-i)x_1 + (2+i)(x_2 - 2x_3)] = 0$

CONICA GENERALE: $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$

$\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ $\forall k$ tale che

$$\pi: \ kx+y+(k+1)z+1=0$$

$$\sigma: \ k^2x+ky+2z-3=0$$

$\pi \cap \sigma \subseteq [x_4=0]$.

vogliamo che $\pi \neq \sigma$ e $\pi \parallel \sigma$

ma $\pi \parallel \sigma \iff \operatorname{rk}\begin{pmatrix} k & 1 & k+1 \\ k^2 & k & 2 \end{pmatrix} = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ k & 2 \end{vmatrix} = 2-k^2-k$$

rk MATRICE $= 1 \iff k = 1, -2$

per $k=1$ il sistema diventa $\begin{cases} x+y+2z+1=0 \\ x+y+2z-3=0 \end{cases}$

ci sono soluzioni proprie $\Rightarrow \pi \cap \sigma \subseteq [x_4=0]$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} rk(A|B) &= 2 \neq \\ rk(A) &= 1 \end{aligned}$$

RISPOSTA PER $\boxed{k = +1, -2}$

Due piani hanno intersezione retta impropria $\Leftrightarrow$ sono paralleli e distinti. $\Leftrightarrow$ i coeff. della matrice incompleta sono prop nelle 2 righe ma quelli della completa non lo sono.

$rk(A) = 1$, $rk(A|B) = 2$.

$\mathcal{C}_k : (k+1)(xy) + kxz + yz = 0$ $\qquad x_3 = z$

1) Si determini per quali k le polari ai

di $(0:2:i)$ e $(0:2:-i)$ si int. in $(1\ -3\ -4)$

2) Si determini r_0 tale che $\forall k$ il centro di C_k sia

in r_0.

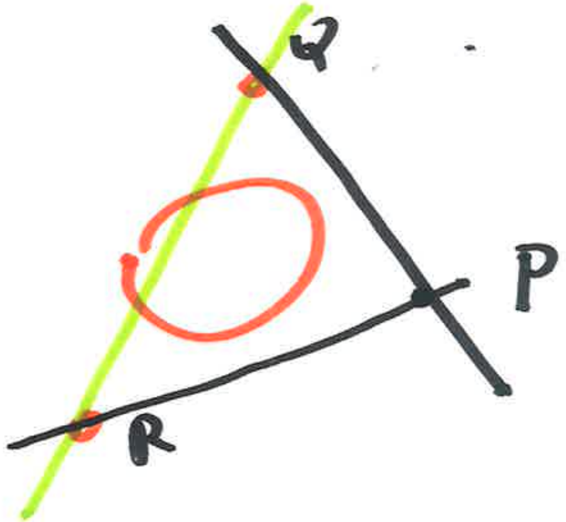
$$\begin{bmatrix} 0 & k+1 & k \\ k+1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[1\ -3\ -4]\,A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$[-3(k+1)-4k \quad k-3 \quad \overset{k-3}{\cancel{1+3k}}].$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -7k-3 & k-3 & k-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$



$2(k-3) + i(k-3) = 0$

$2(k-3) - i(k-3) = 0$

entrambe soddisfatte

$\Leftrightarrow k = 3$

$$(1\ 0\ 0) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (k+1)x_2 + kx_3 = 0$$

$$(0\ 1\ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (k+1)x_1 + x_3 = 0$$

$x_3 = -(k+1)x_1$

$(k+1)x_2 - k(k+1)x_1 = 0$

$(k+1)(x_2 - kx_1) = 0$ $\qquad x_2 = kx_1$

$G = [(x_1, kx_1, -(k+1)x_1)]$

$x_1 \neq 0$

se $k = 0 \Rightarrow G = (1, 0, -1)$

se $k = 1 \Rightarrow G = (1\ 1, -2)$

la retta per $(1\ 0\ -1)$
$(1\ 1\ -2)$.

$(-1, 0)$

$\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$

$\frac{x+1}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{y-0}{-\frac{1}{2}-0}$ $\qquad \boxed{2(x+1) = -2y}$

rif Affine tale che $\pi : [(0,1,1); \mathcal{L}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_3)]$

abbia eq. $z=0$.

Π' deve essere $(O', (\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'))$

tale che $\pi = [(000); \mathcal{L}(\bar{e}_1', \bar{e}_2')]$

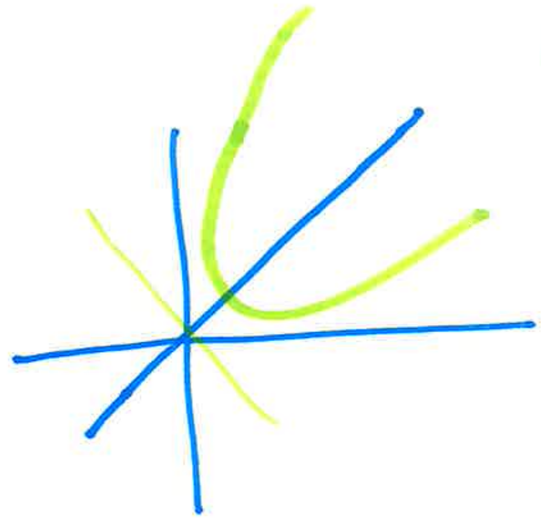
$$\bar{e}_1' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$$
$$\bar{e}_2' = \bar{e}_3$$
$$\bar{e}_3' = \bar{e}_2$$

COME ORIGINE PRENDO IL VECCHIO PUNTO $(0\,1\,1)$.

$[\, O' = (0\,1\,1) \quad B' = (\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_2)\,]$

parabola con asse // alla retta $r: x-y=3$.

conica tg. retta impropria nel punto $[(1,1,0)] = r_\infty$



$$(1\ 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_{11}a_{22} = a_{12}^2$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{12} + a_{22} = 0$$

$$2a_{12} = -a_{11} - a_{22}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^2+y^2-2xy+1=0$$

$rk(A)=2 \ \forall k$

$$\begin{array}{c|cccc} \pi & k-2 & 1 & 0 & 1-k \\ \sigma & 3-k & 0 & 2 & 1 \\ r & 1 & 1 & k-2 & -2 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 3-k & 0 & 2 \\ 1 & 1 & k-2 \end{vmatrix} = -2(k-2)-(3-k)(k-2)+2$$

$$=(-5-k)(k-2)+2=$$

$$=-k^2+3k+12$$

$$\begin{array}{cccc} k-2 & 1 & 0 & 1-k \\ 3-k & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & k-2 & -2 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 3-k & 0 & 2 \\ 1 & 1 & k-2 \end{vmatrix} = (k-2)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & k-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3-k & 2 \\ 1 & k-2 \end{vmatrix}$$

$$-2(k-2) - (3-k)(k-2) + 2 =$$

$$= (k-2)(k-5) + 2$$

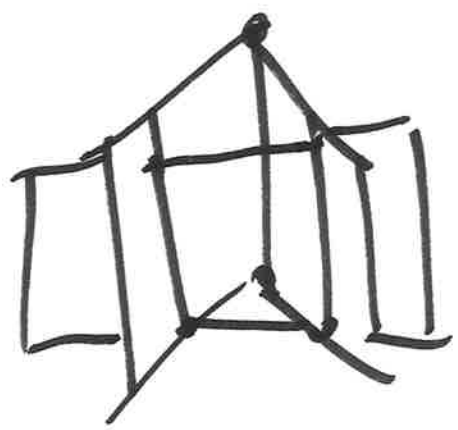
$$k^2 - 7k + 12 \quad \begin{cases} k = 3 \\ k = 4 \end{cases}$$

se $k \neq 3, 4$: i 3 piani sono parte di una stella propria

se $k = 3$ $rk(A|B)$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

i 3 piani non hanno int. propria



$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$

nessuno dei 3 piani è parallelo ad un altro

$\Rightarrow$ stella impropria

$k=4 \Rightarrow rk(A)=2$

$rk(A|B)=2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

- per $k=4$ i piani sono elementi di un fascio proprio. $rk(A)=rk(A|B)=2$

- per $k=3$ stella impropria
- per $k \neq 3,4$ stella propria.

$(1\,1)$ $\quad (1\,0)$ $\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$(1\;1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad a_{11} + 2a_{12} + a_{22} = \underline{1}$$

$$(1\;0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad a_{11} = 1$$

$$(1\;0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad a_{11} + a_{12} = 0$$

$$a_{11} = 1 \quad a_{12} = -1$$

$$a_{22} = 1 - 1 + 2 = $$
$$= 2$$

matrice
prod. scal.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ellisse di centro $(1,0)$ ed asintoto $\parallel$

$ix+y=2$

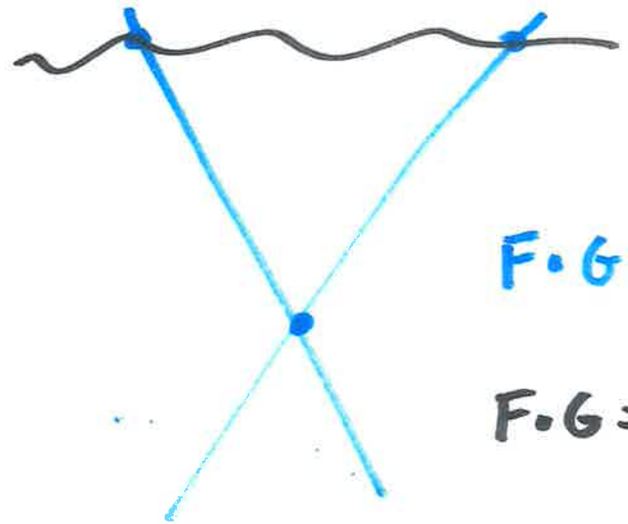
$[(1,-i,0)] = J_\infty$

ellisse deve essere una circonferenza.

$(x-1)^2+(y-0)^2=2$

Ellisse di centro $(1,0)$ ed asintoto $\parallel$ $[(1,2i,0)]$

[



$F \cdot G = 0$

$F \cdot G = 1$

$[(1, 2i, 0)]$

$[(1, -2i, 0)]$

$\cancel{(x-1) = 2i}$

$y = 2i(x-1)$

$y = -2i(x-1)$

$[y - 2i(x-1)][y + 2i(x-1)] = 1$

$y^2 + 4(x-1)^2 = 1$

$\cancel{x^2-2x+1}$

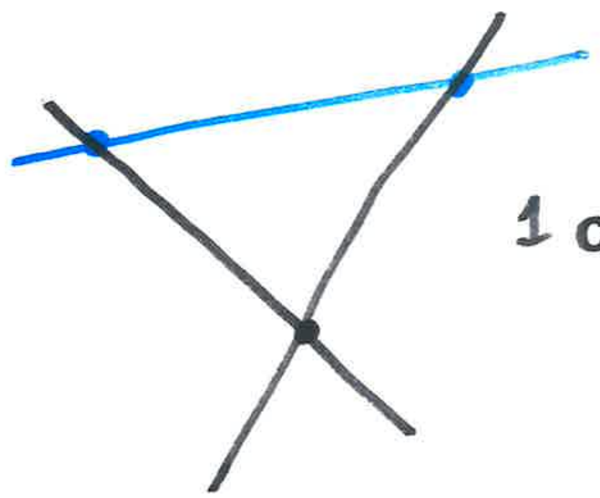
$4x^2-8x+4+y^2-1$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(1\ 0\ 0) = (4\ \ 0\ \ -4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$4x = 4 \qquad x = 1$

$$(0\ 1\ 0) = (0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad y = 0.$$



1 CONICA DEGENERE

2) + CAMBIARE TERMINE NOTO AFFINCHÉ SIA IRRIDUCIBILE