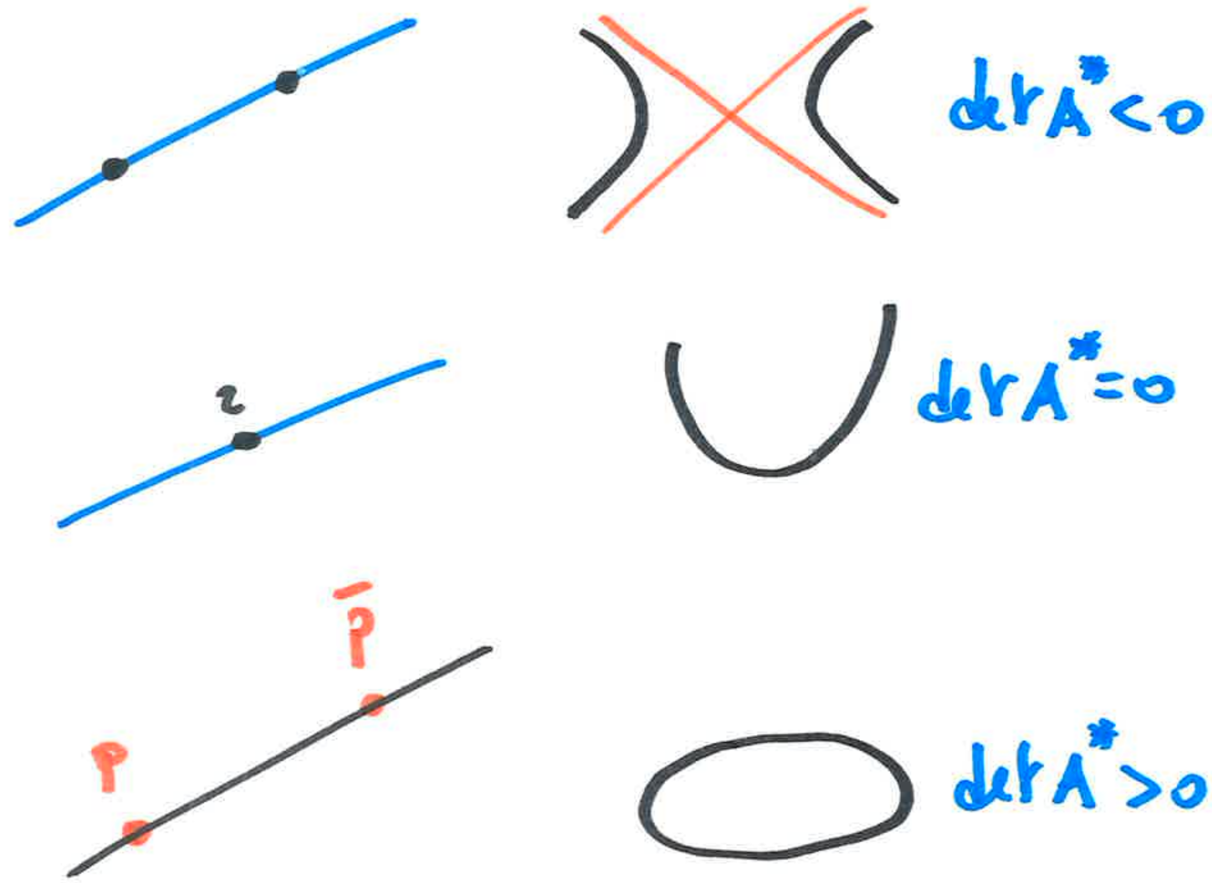
CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE CONICHE GENERALI

Intersezioni con la retta impropria



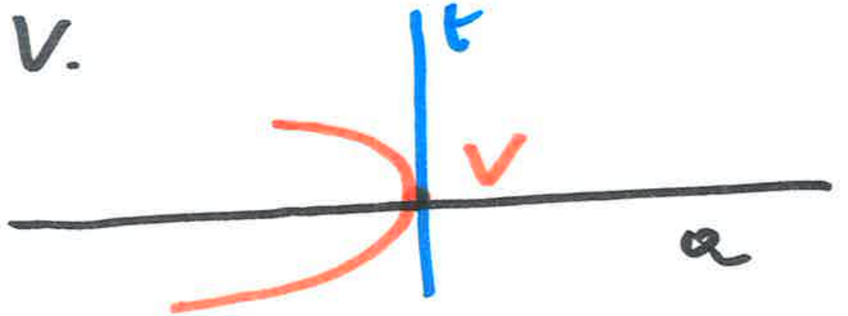
DATA UNA CONICA $\mathcal{C}$ TROVARE UN RIFERIMENTO (AFFINE/EUCLIDEO) IN CUI ESSA ABBIA LA FORMA PIÙ SEMPLICE POSSIBILE.

RICHIAMO CHE

1) Una conica a centro
   - è una circonferenza (e ∀ diametro è asse)
   - ha esattamente 2 assi ortogonali fra loro.

2) Una conica non a centro è una parabola
   - ha esattamente $\underline{1}$ asse e 1 vertice.

3) Sia $\mathcal{C}$ una conica V un suo vertice $\Rightarrow$
la t_g in V a $\mathcal{C}$ è ortogonale all'asse di $\mathcal{C}$ per V.



la t_g a $\mathcal{C}$ in V deve passare per il polo di a
ma il polo di a è ortogonale ad a (= asse).

1) Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro e sia G il suo centro.

Scegliamo un riferimento euclideo la cui origine sia G.

→ Se $\mathcal{C}$ circonferenza prendiamo ora come ~~assi~~ base del rif. euclideo due vettori ortogonali arbitrari.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = a_{22}$
$a_{12} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} [1\ 0\ 0]\,A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \\ [0\ 1\ 0]\,A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \end{array}\right\} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{11}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

mi dà C

ma C deve avere coordinate $[(0\ 0\ 1)]$

$\Rightarrow a_{13} = 0,\ a_{23} = 0$

$\Rightarrow$ la circonferenza ha eq.

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + a_{33} x_3^2 = 0$$

$$a_{11}(x^2+y^2) + a_{33} = 0 \qquad a_{11} \neq 0$$

$$(x^2+y^2) = \delta \qquad \text{con } \delta = -\frac{a_{33}}{a_{11}}$$

<u>N.B</u> $\delta > 0 \Rightarrow$ circ. a punti reali

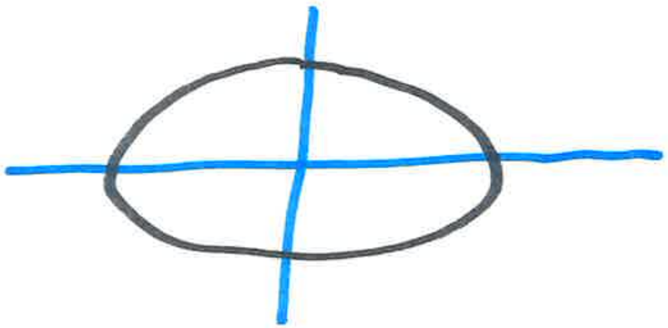
$\delta = 0 \Rightarrow$ cir. riducibile in 2 rette imm. coniugate $x = \pm i y$

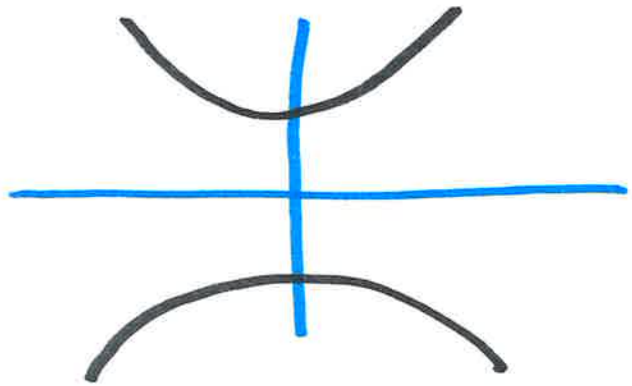
$\delta < 0 \Rightarrow$ circ. irriducibile a punti tutti immaginari.

Sia C a centro e non una circonferenza

ELLISSI / IPERBOLI.

- Scegliamo un riferimento $\Gamma = (O, \mathcal{B})$ tale che 1) $O = C$ 2) $\mathcal{B} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ è una base ortonormale tale che $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$ sono versori con la direzione degli assi di $\mathcal{C}$.





A matrice della conica.

$$[1\,0\,0]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$[(0\,0\,1)]$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (0\,0\,1)$ deve essere sol. $\Rightarrow$

$a_{13} = a_{23} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

imponiamo che gli assi siano $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$

il punto $(1\,0\,0)$ deve essere coniugato al punto $(0\,1\,0)$.

$$(1\,0\,0)A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0 \qquad (a_{11}\;a_{12}\;0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0$$

$$a_{12}=0$$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & 0\\ 0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix}$$

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0$$

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2=-a_{33}$$

ellisse se $a_{11}a_{22} > 0$

cioè se l'eq. si può riscrivere come

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c \qquad a^2 = \frac{1}{a_{11}} \quad b^2 = \frac{1}{a_{22}}$$

$$c = -a_{33}$$

se $c = 0$ riducibile

$c > 0$ ellisse a punti reali

$c < 0$ ellisse a punti immaginari

(priva di punti reali).

se $a_{11} a_{22} < 0$

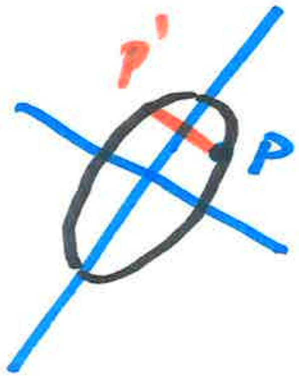
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c \qquad a^2 = \frac{1}{a_{11}} \quad b^2 = -\frac{1}{a_{22}}$$

$$c = -a_{33}.$$

IPERBOLE

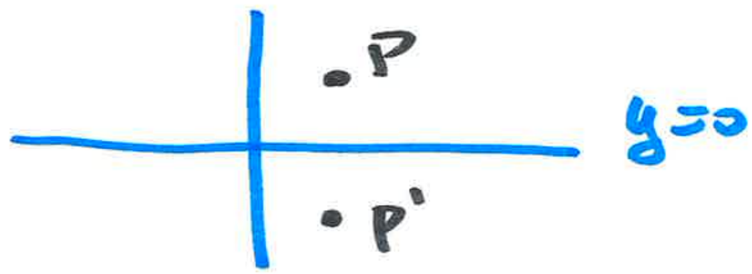
Se $a^2 = b^2$ iperbole equilatera.

<u>OSS</u>: Gli assi di una conica (a centro) sono assi di simmetria.



IN FORMA CANONICA

$$(*) \qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = c$$



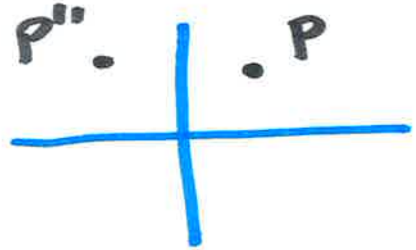
la simmetria di asse l'asse $y=0$ manda il punto $P=(x,y)$ nel punto $P'=(x,-y)$

ma questa sostituzione lascia $(*)$ invariata

$\Rightarrow$ manda la conica in se stessa.

Idem per la simmetria di asse $x=0$.

che manda $P=(x,y) \rightarrow P''=(-x,y)$.



□

per le parabole.

→ scegliamo un riferimento $\Gamma = (O, \mathcal{B})$ ove

$O = V$ vertice della parabola

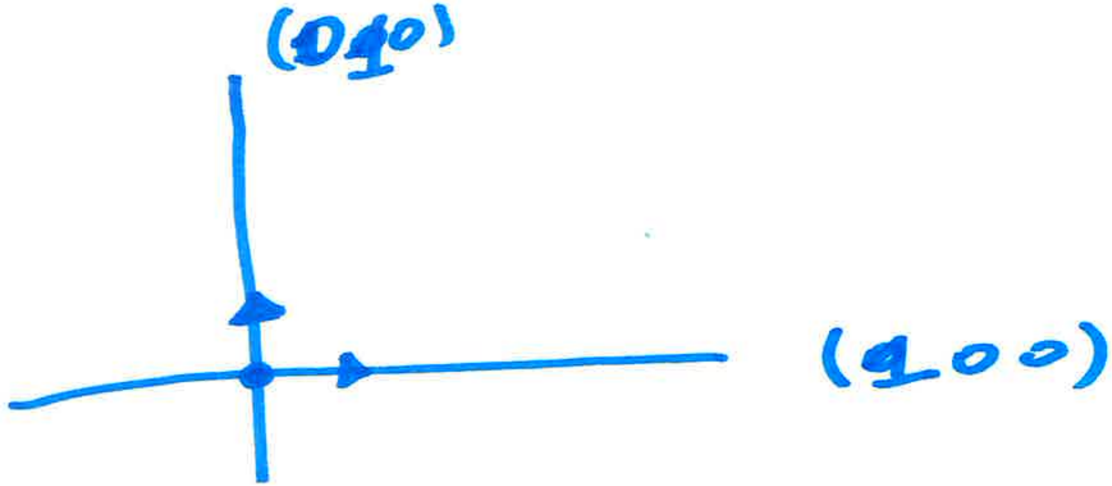
$\mathcal{B} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ ove

$\bar{u}_1$ = versore orientato come l'asse della parabola

$\bar{u}_2$ = versore ortogonale ad $\bar{u}_1$ ⇒ ORIENTATO COME LA TANGENTE IN V.

la parabola ha come punto improprio il punto $[(1,0,0)]$ passa per il punto $[(0,0,1)]$ e la tangente in $[(0\,0\,1)]$ è la retta di punto improprio $(0\,1\,0)$.

A



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{13} & \boxed{a_{23}} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A^* = 0$$

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

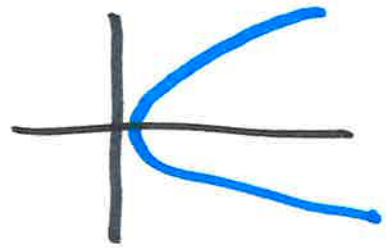
$$(0\,0\,1) A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a_{33} = 0$$

$$(1\,0\,0) A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a_{11} = 0 \Rightarrow a_{12} = 0$$

$$(0\,0\,1) A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a_{23} = 0$$

$$a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 = 0$$

IN COORDINATE AFFINI



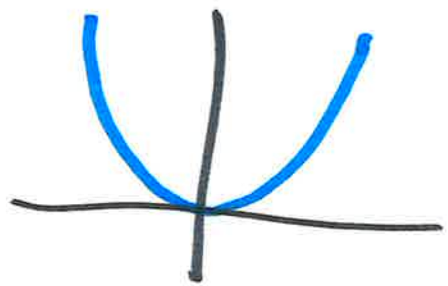
$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$$

$\alpha \neq 0$

cioè $\quad x = \alpha y^2 \quad$ con $\quad \alpha = -\dfrac{a_{22}}{2a_{13}}$

se avessimo scelto come asse della parabola l'asse delle y avremmo avuto

$y = \beta x^2 \qquad \beta \neq 0$



$v = (1\,0\,2) \in \mathbb{R}^3$ deve avere componenti $(2\,1\,0)$.

$$\mathcal{B} = (\bar{e}_3, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$$

$$2\bar{e}_3 + 1\cdot\bar{e}_1 + 0\cdot\bar{e}_2$$

$$2(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3) + 1(\beta_1\,\beta_2\,\beta_3) + 0(\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3) =$$

$$= (1\,0\,2)$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\,0\,0\right), (0\,0\,2), (0\,1\,0).$$

MATRICE <u>**NON**</u> DIAGONALIZZABILE CON AUTOVALORI $+1$ e $+2$ di $m_g = 2$ e 1 RISPETTIVAMENTE.

IMPLICA CHE ALMENO UNO DEI 2 AUTOVALORI HA $m_a > m_g$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} m_g(1)=2=m_a(1) \\ m_g(2)=1 \neq m_a(2)=2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} m_g(1)=2 \neq m_a(1)=3 \\ m_a(2)=1=m_g(2). \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ \hline & & & 2 & 1 \\ & & & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$m_a(1) = 3 \neq 2 = m_g(1)$

$m_a(2) = 2 \neq 1 = m_g(2)$.

c)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & K & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \underline{1} & K & 1 & 0 \\ 1 & 1+K & K & K+3 & 2-K \end{array}\right]$$

$K=0 \Rightarrow$ INCOMPAT

$K \neq 0 \Rightarrow rk(A) = 3 =$

$= rk(A|B) \Rightarrow$

∞^1 SOLUZIONI

OSSERVIAMO CHE SE $K=0 \Rightarrow$ la matrice incompleta HA RANGO 2 (la III riga è la somma delle prime 2) MA LA COMPLETA HA RANGO 3 (la III riga non è somma delle prime 2) $\Rightarrow$ sistema incompatibile.

D) piano per

$$(-1\ 0\ 1\ 1) \qquad (0\ -1\ -1\ 1)$$

$$(1\ 1\ 0\ 0).$$

$$P = [(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)] \in \bar{\pi} \iff rk\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$x_1\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-x_4\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \qquad (\bar{\pi}).$$

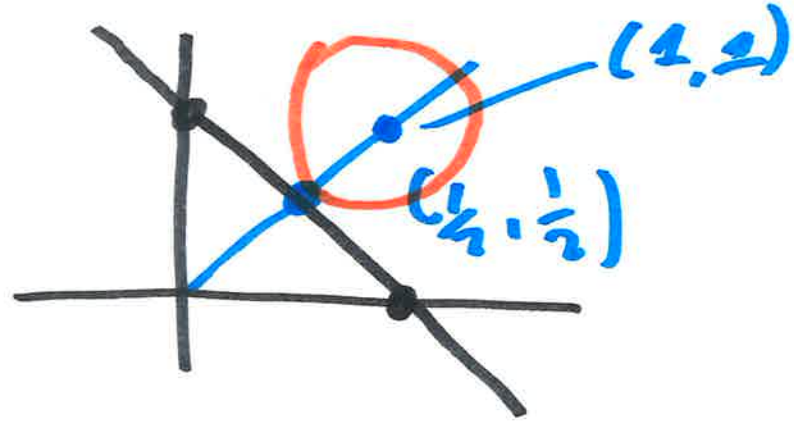
E) Conica generale tale che i punti (1 0) e (0 1) siano coniugati.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

OSSERVIAMO CHE SE (1 0) e (0 1) sono ∈ di una medesima tangente alla conica

⇒ essi sono coniugati

$$(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$$



f)

$$W = \{(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) \mid x_1 + 2x_2 = 0 \quad x_2 - x_3 = 0 \quad x_1 + 2x_3 = 0\}.$$

$$W = ((1\,2\,0\,0), (0\,1\,-1\,0), \cancel{(1\,0\,2\,0)})^{\perp}$$

N.B. i vettori non sono indipendent.

$$\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & +1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 1 \quad 0 & 2 & 0 \end{matrix}$$

$$\mathcal{B} = ((1\,2\,0\,0), (0\,1\,-1\,0)).$$

g) retta incidente e ortogonale a

$$r \begin{cases} x = -1 \\ z = -3 \end{cases}$$ per il punto $(2\ 0\ 1)$.

piano ortogonale ad r per $(2\ 0\ 1)$
e intersecarlo con r $\Rightarrow$ retta per 2 punti.

r ha parametri direttori $(0\ 1\ 0)$.

$$0 \cdot (x-2) + 1(y-0) + 0 \cdot (z-1).$$

$\boxed{y=0}$ intersezione con r $(-1\ 0\ -3)$

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-0}{0-0} = \frac{z-1}{-3-1}$$

$y = 0$

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{z-1}{-4} =$$

$$s: \begin{cases} 4(x-2) = 3(z-1) \\ y = 0 \end{cases}$$

ok

ε) iperbole per i punti:

$$[(i,0,0)],\ [(0,2,0)].$$

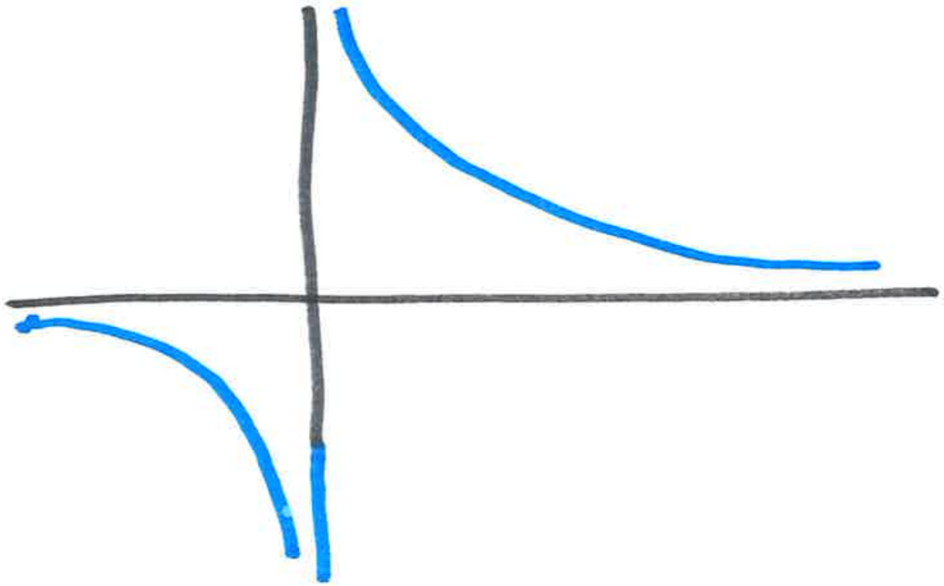
~~NON ESISTE~~!

una iperbole ha 2 punti impropri reali. OSSERVIAMO CHE I PUNTI DATI SONO <u>REALI</u>

$$[(i,0,0)] = [(1,0,0)]$$

iperbole che passi per i punti impropri

$[(1,0,0)]$ e $[(0,1,0)]$



$xy = 1$

iperbole per i punti reali

$[(a,b,0)]$ $\quad$ $[(c,d,0)]$.

$$(bx - ay)(dx - cy) = \alpha \qquad \alpha \neq 0$$

Si scrivano le equazioni di una ellisse per i punti: $[(1, i, 1)]$ e $[(0, 0, 1)]$

N.B una ellisse è una curva reale

$\Rightarrow$ essa deve anche passare per

$[(1, -i, 1)]$

possiamo anche prendere come punti impropri I_∞, $\bar{I}_\infty$ e quindi cercare una circonferenza.

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0 \quad \text{con}$$

$$1 - 4 + a - 2bi = 0 \quad \rightarrow b = 0 \quad a = +3$$

valori di k per cui la polare di (1,1) rispetto la conica di

$$\begin{bmatrix} k & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 \end{bmatrix}$$

sia $y = -\frac{1}{2}$

$P = (1\ 0\ 0)$

$Q = (0\ -\frac{1}{2}\ 1)$

$$[1\ 1\ 1]\, A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \cancel{(2k+}\ k x_1 + x_2 + (k+1) x_3 = 0$$

$k = 0$

$x_2 + x_3 = 0$

$-\frac{1}{2} + 1 \neq 0$ NON $\exists$.

Es. C) due rette sghembe contenute nei piani

$\pi : x+y+z=0$

$\sigma : x+y-z=2$ a distanza $=2$

Cerchiamo 2 piani ϑ, ϑ' paralleli a distanza $d=2$

tali che le rette $\pi \cap \vartheta$ e $\sigma \cap \vartheta'$ non siano parallele.

$x=0$ $\quad \begin{cases} x=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

$x=2$ $\quad \begin{cases} x=2 \\ y-z=2 \end{cases}$

N.B $z=0$, $z=2$ NON VANNO BENE.

$$\cancel{\begin{cases} x+y=-2 \\ z=2 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=4 \\ z=2 \end{cases}$$