Coniche

→ rappresentare con una eq. matriciale del tipo

$$(x_1\ x_2\ x_3)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

con $A = {}^{T}\!A$ matrice simmetrica.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$ matrice della conica.

1) la matrice A non è l'unica matrice possibile tale che ${}^{T}\!XAX = 0$ sia eq. della conica.

2) essa è l'unica possibile, a meno di proporzionalità, che è anche simmetrica.

Una conica $\mathcal{C}$ ha punti doppi $\iff \det A = 0$
in tale caso i punti doppi corrispondono alle classi di autosoluzioni di $AX = \underline{0}$.

$rg(A) = 3 \rightarrow 0$ punti doppi conica irriducibile.
$rg(A) = 2 \rightarrow \exists!$ punto doppio
$rg(A) = 1 \rightarrow \exists\, \infty^1$ punti doppi

conica riducibile in 2 rette.

Visto che A è reale e simmetrica possiamo sempre diagonalizzarla in modo ortogonale.
In particolare se noi cambiamo base in $\mathbb{R}^3$ le coordinate dei punti cambieranno come $X = CX'$
con X' nuove coord. C matrice di

cambiamento di base $\Rightarrow$

l'equazione di una conica cambia

$$^{T}XAX = {}^{T}(CX')\bar{A}(CX') = {}^{T}X'({}^{T}CAC)X'$$

ma A reale e simmetrica $\Rightarrow$ A ortog. diag.

$\Rightarrow \exists\, C$ tale che ${}^{T}CAC = D$ con ${}^{T}C = C^{-1}$.

$\rightarrow$ possiamo sempre scegliere un riferimento tale che in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ l'eq. della conica sia diagonale.

CLASSIFICHIAMO LA CONICA IN TERMINI DEGLI AUTOVALORI DI A (in termini dei <u>SEGNI</u> degli autovalori di A).

000	00+ 00−	0++ 0+−	0+− 0−+	++− −−+	+++ −−−
eq. $0=0$ NON è una curva $rg(A)=0$	$rg(A)=1$ la conica si spezza in una retta reale contata 2 volte. ~~[illegible]~~ $\alpha x_3^2=0$	$rg(A)=2$ $\alpha^2x_1^2+\beta^2x_2^2=0$ la conica si spezza in 2 rette im. e coniug.	$rg(A)=2$ $\alpha^2x_1^2-\beta^2x_2^2=0$ la conica si spezza in 2 rette reali e distinte. $\alpha x_1+\beta x_2=0$	Conica generale → irriducibile → con punti reali	$\alpha^2x_1^2+\beta^2x_2^2+\gamma^2x_3^2=0$ conica priva di punti reali

$(\alpha x+i\beta y)(\alpha x-i\beta y)$.

$\alpha x_1-\beta x_2=0$

oss: Sia $\mathcal{C}$ una conica generale.

Vogliamo caratterizzare le rette tangenti a $\mathcal{C}$.

Una retta r è detta tangente a $\mathcal{C}$ se $|r \cap \mathcal{C}| = 1$ cioè r interseca $\mathcal{C}$ in esattamente un punto con molteplicità 2.

Siano $P = [(x_1\ x_2\ x_3)]$ $\quad Q = [(y_1\ y_2\ y_3)]$ due punti distinti.

consideriamo la retta r per P e per Q.

$$Z_{\alpha,\beta} = [\alpha(x_1\ x_2\ x_3) + \beta(y_1\ y_2\ y_3)]$$

$$\left[\alpha(x_1\ x_2\ x_3)+\beta(y_1\ y_2\ y_3)\right] A \left(\alpha\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\boxed{(\alpha\,{}^{T}X+\beta\,{}^{T}Y)A(\alpha X+\beta Y)=0}$$

$$\alpha^2\,{}^{T}XAX+\beta^2\,{}^{T}YAY+2\alpha\beta\,{}^{T}XAY=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=0$$

$$({}^{T}XAY)^2-({}^{T}XAX)({}^{T}YAY)=0$$ eq. delle tangenti.

supponiamo $Q\in\mathcal{C} \Rightarrow {}^{T}YAY=0 \Rightarrow$

${}^{T}XAY=0$ eq. della tangente nel punto $Q=[(y_1\ y_2\ y_3)]$.

$$x_1^2+4x_1x_2+x_2^2 - 2x_2x_3 = 0$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A)\neq 0$$

$$x_1 = 1$$
$$x_3 = 1$$

$$1+4x_2+x_2^2 - 2 = 0$$

$$x_2^2+4x_2-1=0$$

$$x_2 = 2 \pm \sqrt{4-1} =$$

$$= 2 \pm \sqrt{3}.$$

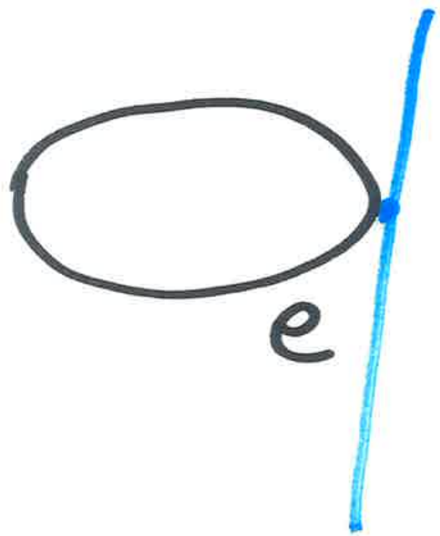
$$[(1, 2+\sqrt{3}, 1)]$$

$$(x_1\ x_2\ x_3)A\begin{bmatrix} 1 \\ 2+\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+2x_2 & 2x_1+x_2-x_3 & -x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{(x_1+2x_2) + (2+\sqrt{3})(2x_1+x_2-x_3) - x_2 = 0}_{\text{eq. tg. nel punto}}$$

$$\downarrow$$

$x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = 1.$



$^{t}XAY=0$

Ad ogni conica $\mathcal{C}$ é associata una matrice reale e simmetrica A.

Ad ogni matrice reale e simmetrica è associato un prodotto scalare (e dunque una nozione di ortogonalità)

3) Ad ogni conica è associata una nozione di "ortogonalità" derivante dal prod. scalare indotto dalla matrice che rappresenta la conica stessa.

<u>Def.</u>: Si dice che 2 punti P, e Q di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sono <u>coniugati</u> rispetto una conica $\mathcal{C}$ $\Leftrightarrow$ chiamate ${}^T X = [(x_1\ x_2\ x_3)]$ le coordinate di P ed ${}^T Y = [(y_1\ y_2\ y_3)]$ si ha ${}^T X A Y = 0$ cioè $P \in Q^{\perp_{\mathcal{C}}}$

→ OSS 1) Un punto P è coniugato a se stesso, cioè $P \in P^{\perp_{\mathcal{C}}}$ cioè ${}^T X A X = 0 \Leftrightarrow P$ appartiene alla conica.

2) chiamiamo <u>polare</u> di un punto P il luogo dei punti ad esso coniugati:

cioè $P^{\perp_{\mathcal{C}}}$.

1) Se la conica è generale $\Rightarrow$ $\dim_v P = 1$ $\Rightarrow$ $\dim_v P^{\perp_{\mathcal{C}}} = 2$ $\Rightarrow$ la polare di un punto P è una retta.

2) Se $P \in \mathcal{C} \Rightarrow P^{\perp_{\mathcal{C}}}$ $\quad {}^{T}XAY = 0$

con $P = [(y_1\ y_2\ y_3)]$

ma questa è esattamente la retta tangente in P alla conica $\mathcal{C}$.

P punto semplice

3) osserviamo che se

$$X \in Y^{\perp_{\mathcal{C}}}$$

allora ~~[illegible]~~ $Y^{\perp_{\mathcal{C}}\perp_{\mathcal{C}}} \in X^{\perp_{\mathcal{C}}}$

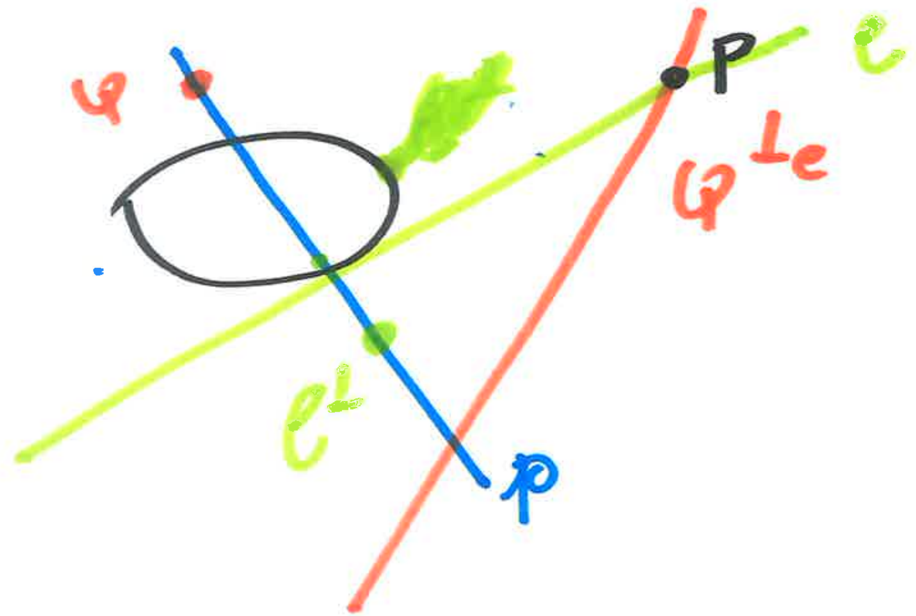
e se la conica è generale $\Rightarrow Y^{\perp_{\mathcal{C}}\perp_{\mathcal{C}}} = Y$.

Sia $\mathcal{C}$ una conica generale, P un punto e p la polare di P cioè $P^{\perp_{\mathcal{C}}}$ ovvero posto $P = [(y_1\, y_2\, y_3)]$ poniamo p la retta di eq. $(x_1\; x_2\; x_3) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$

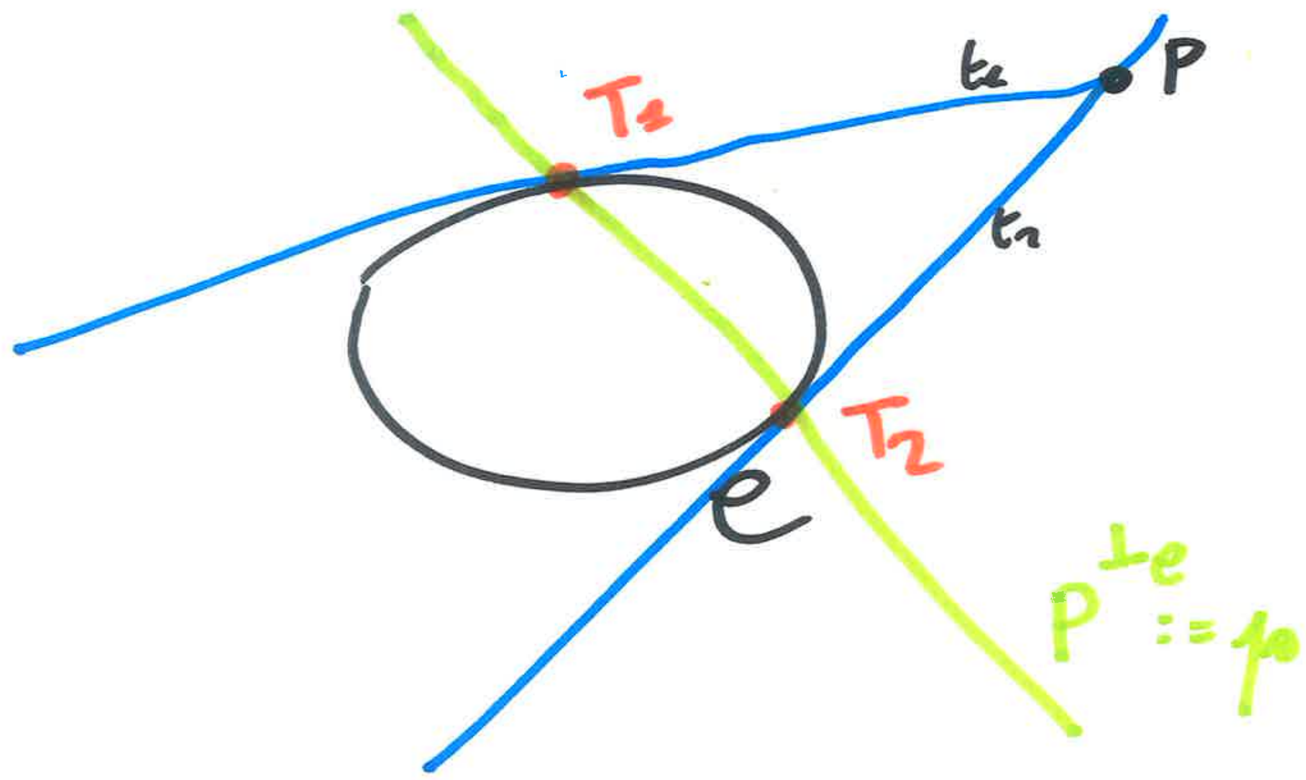
(P è detto polo di p).

Teorema: I poli delle rette passanti per P appartengono a p; le polari dei punti di p passano per

P (principio di reciprocità).



Teorema: Sia $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ un punto e $\mathscr{C}$ una conica generale (= priva di punti doppi).
Allora la polare $p = P^\perp$ di P è la retta che congiunge i punti di tg. con la conica delle 2 tangenti condotte per P.



Sia P un punto e consideriamo per P le 2 tangenti alla conica $\mathcal{C}$. Se $P \in \mathcal{C} \Rightarrow$ 2 tg. coincidenti, la polare di P è la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P.

Altrimenti $\Rightarrow$ 2 rette distinte e siano t_1, t_2 tali rette e

T_1, T_2 i punti di tangenza.

OSSERVIAMO CHE $t_1 = T_1^{\perp}$ e $P \in t_1 = T_1^{\perp}$

$t_2 = T_2^{\perp}$ e $P \in t_2 = T_2^{\perp}$

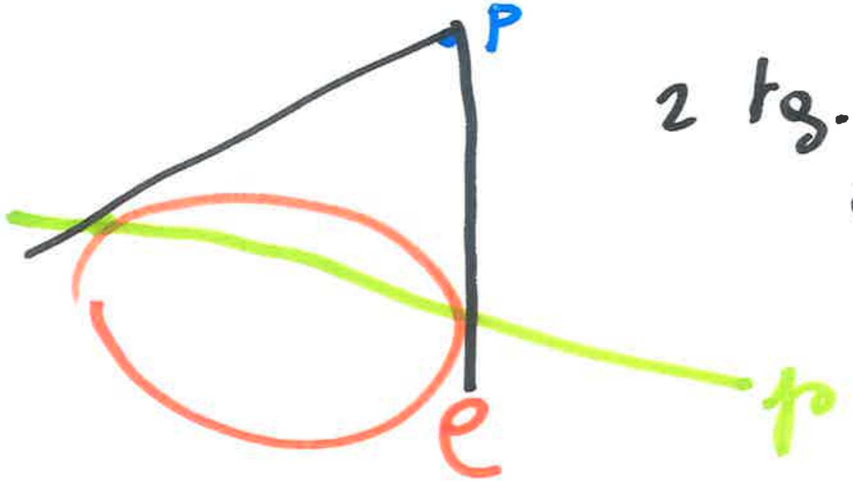
MA ALLORA PER IL PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ

$T_2 = T_2^{\perp\perp} \in P^{\perp} = p$

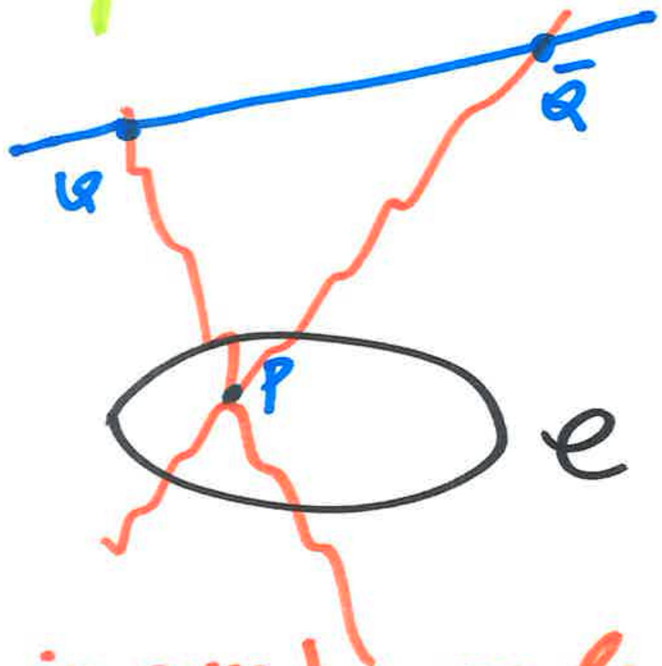
$T_1 = T_1^{\perp\perp} \in P^{\perp} = p$

$\rightarrow$ quindi sia T_1 che T_2 appartengono alla polare di P $\Rightarrow$ la polare di di P è la retta per T_1 e T_2 $\square$

OSS:



2 tg. reali ⇒ P é detto esterno alla conica.



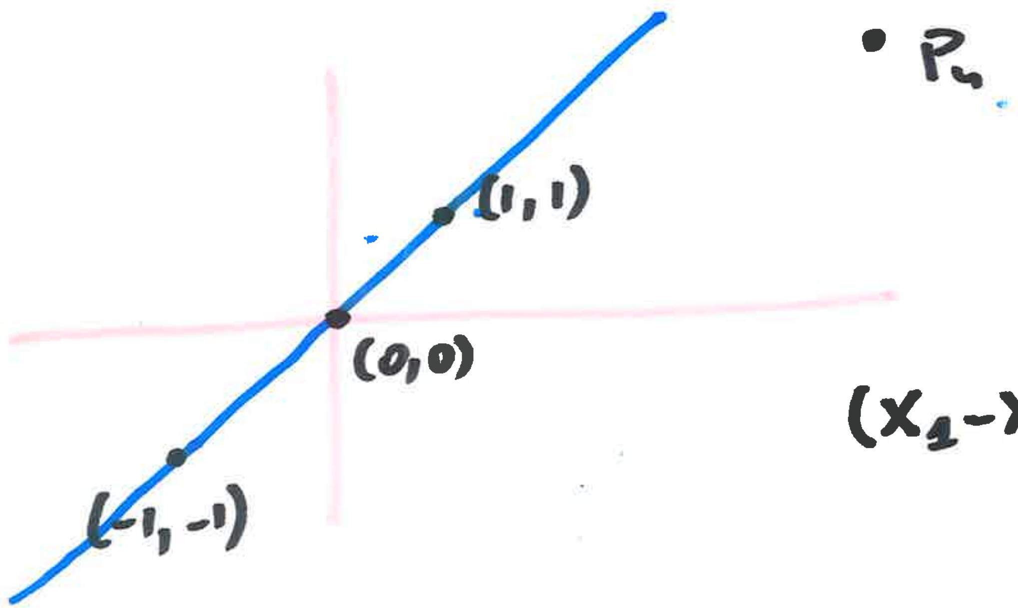
2 tg. imm. e coniugate ⇒ P é detto interno alla conica.

in questo caso le tg. sono 2 rette imm. e coniugate.

Esercizio: Si determinino tutte le coniche passanti per i punti affini

$P_2 \qquad P_1 \qquad P_3 \qquad P_4$

$(1\ 1),\ (0\ 0),\ (-1,-1),\ (4,5).$



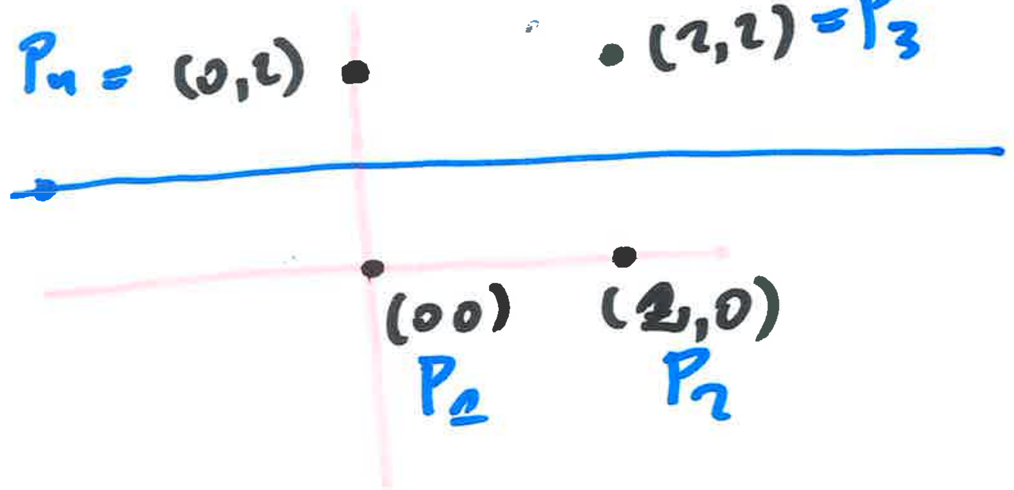
$(x_1 - x_2)$

3 punti sono su di una retta.
per il teorema di ordine se una retta interseca la conica in >2 punti $\Rightarrow$ essa é componente.
la conica é unione di $x=y$ con un'altra retta per P_4

$$(x-y)\left[\frac{(x-4)}{\alpha}-\frac{(y-5)}{\beta}\right]=0$$

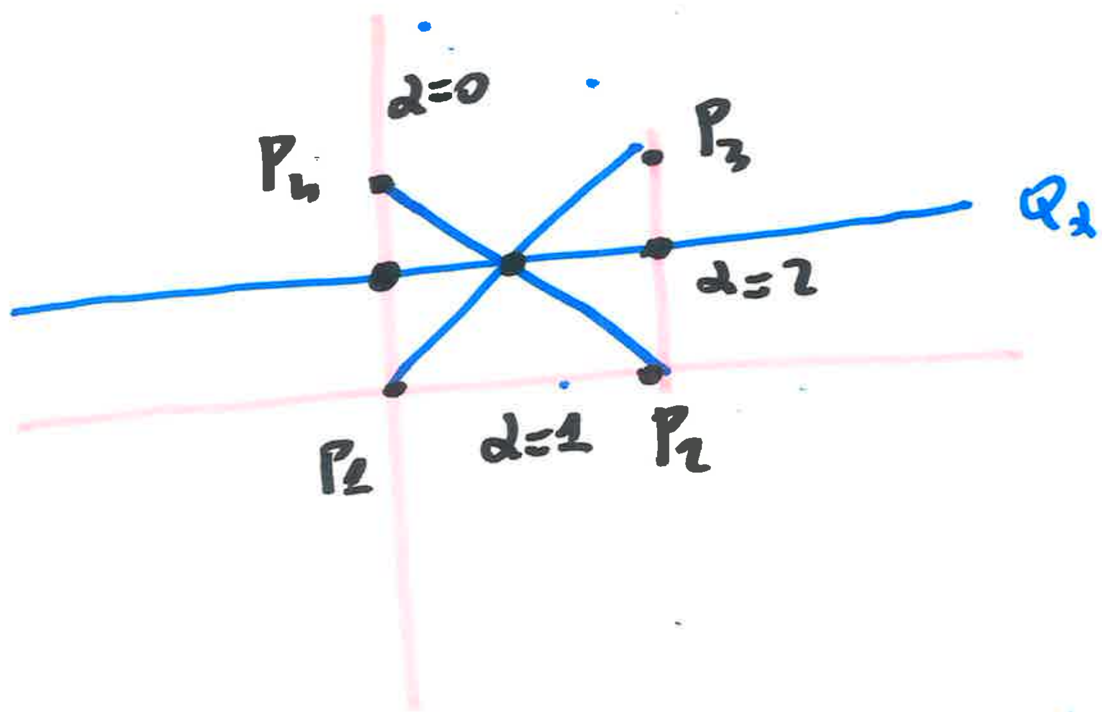
tutte coniche riducibili.

$$(x_1-x_2)\left[\alpha(x_1-4x_3)+\beta(x_2-5x_3)\right]=0.$$



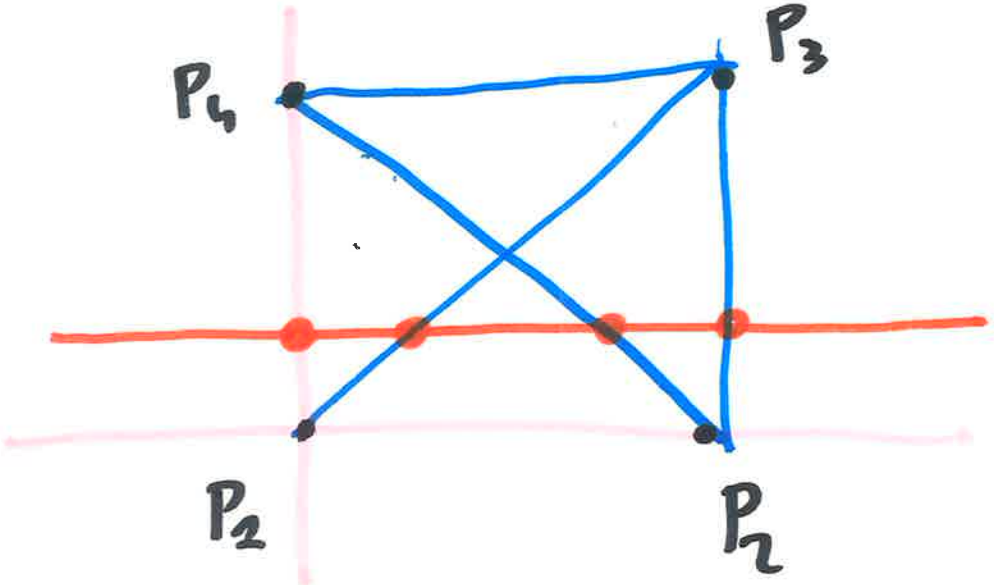
$Q_\alpha := (\alpha, 1)$

per quali valori di α la conica per $P_1 \ldots P_4, Q$ é riducibile?



Una conica è riducibile $\Leftrightarrow$ contiene una retta
$\Leftrightarrow$ contiene (almeno 3 punti allineati).

$\alpha \in \{0, 1, 2\}$.



$Q = (\alpha, \frac{1}{2})$

4 soluzioni

CLASSIFICAZIONE PROIETTIVA DELLE CONICHE.

• CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE CONICHE IRRIDUCIBILI.

→ STUDIARE LE CONICHE IN TERMINI DEI LORO PUNTI ALL'INFINITO $(x_3 = 0)$.

- Mettiamo a sistema l'equazione

$$\begin{cases} {}^{T}XAX=0 \\ x_3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$$

$$A^{*}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad -$$

<u>OSS:</u> Se $A^{*}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ la conica ha eq.

$$2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}^{*}x_3^2=0$$

$$x_3(2a_{13}x_1+2a_{23}x_2+a_{33}x_3)=0$$

é unione di 2 rette di cui una è la retta impropria $\Rightarrow$ NON È GENERALE.

$A^* \neq \underline{\underline{0}}$ avrà 2 autovalori $\begin{cases} 0+,\ 0- \\ ++,\ -- \\ +-,\ -+ \end{cases}$

1) se gli autovalori di A^* sono $(0,+)$ o $(0,-)$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\det A^* = 0$ e la forma quadratica $\alpha x_2^2 = 0$ indotta sulla retta impropria si annulla in un unico punto $\Rightarrow$ chiameremo la conica <u>PARABOLA</u>.

2) se gli autovalori di A^* sono $(++)$ o $(--)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ la forma quadratica indotta sulla retta impropria è del tipo $\alpha^2 x_1^2 + \beta^2 x_2^2 = 0$ e non ci sono punti reali $\Rightarrow$ chiameremo la conica <u>ELLISSE</u>.

$\iff \det(A) > 0$

3) se gli autovalori di A^* sono $(+-)$ o $(-+)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ la forma quadratica indotta sulla retta impropria è del tipo $\alpha^2 x_1^2 - \beta^2 x_2^2 = 0$

$\Rightarrow (\alpha x_1 + \beta x_2)(\alpha x_1 - \beta x_2) = 0 \Rightarrow$ ci sono 2 punti reali e distinti $\Rightarrow$ CHIAMEREMO LA CONICA <u>IPERBOLE</u>.

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$\det A^*$	AUTOVALORI	PUNTI IMPROPRI	CONICA
0	$(0,+), (0,-)$	 Tg. retta impr.	PARABOLA
>0	$(++), (--)$	 2 pti imm coniugati.	ELLISSE.
<0	$(+-), (-+)$	 2 pti reali e distinti	IPERBOLE.

Lavoriamo in $AG(2,\mathbb{R})$ visto immerso in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$

Def: Sia $\mathcal{C}$ una conica generale.

1) Si dice CENTRO di $\mathcal{C}$ il polo della retta impropria.

2) Si dice DIAMETRO di $\mathcal{C}$ la polare di un punto improprio. = retta per il centro.

3) Si dice ASINTOTO di $\mathcal{C}$ una tangente propria a $\mathcal{C}$ in un suo punto improprio.

4) Si dice ASSE di $\mathcal{C}$ un suo diametro ortogonale al proprio polo (ort rispetto

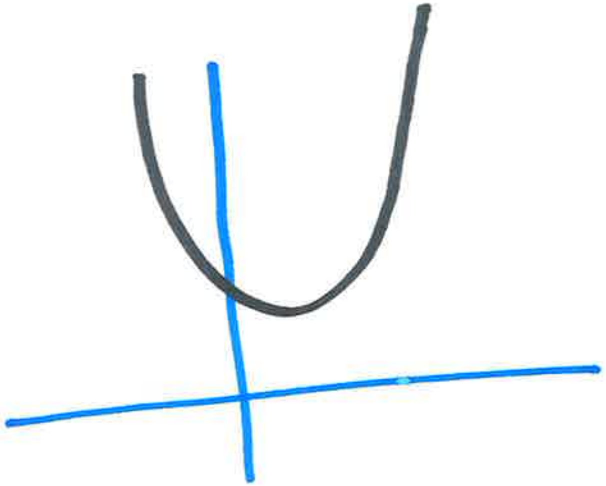
prod. scalare std.).

5) Si dice Vertice di $\mathcal{C}$ una sua qualsiasi intersezione con un asse.

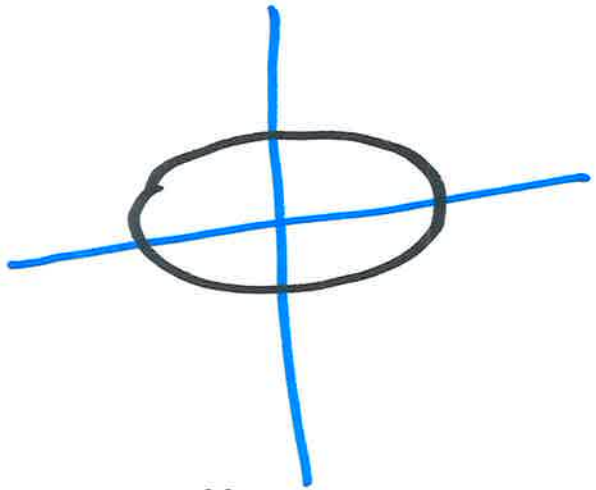
6) Chiamate r_1, r_2 e $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ le 4 tangenti a $\mathcal{C}$ condotte per i 2 punti ciclici del piano $I_\infty = [(1, i, 0)]$, $\bar{I}_\infty = [(1, -i, 0)]$ si dicono fuochi le intersezioni proprie di

$$r_1 \cap \bar{r}_1 \qquad r_1 \cap \bar{r}_2$$
$$r_2 \cap \bar{r}_2 \qquad \bar{r}_1 \cap r_2$$

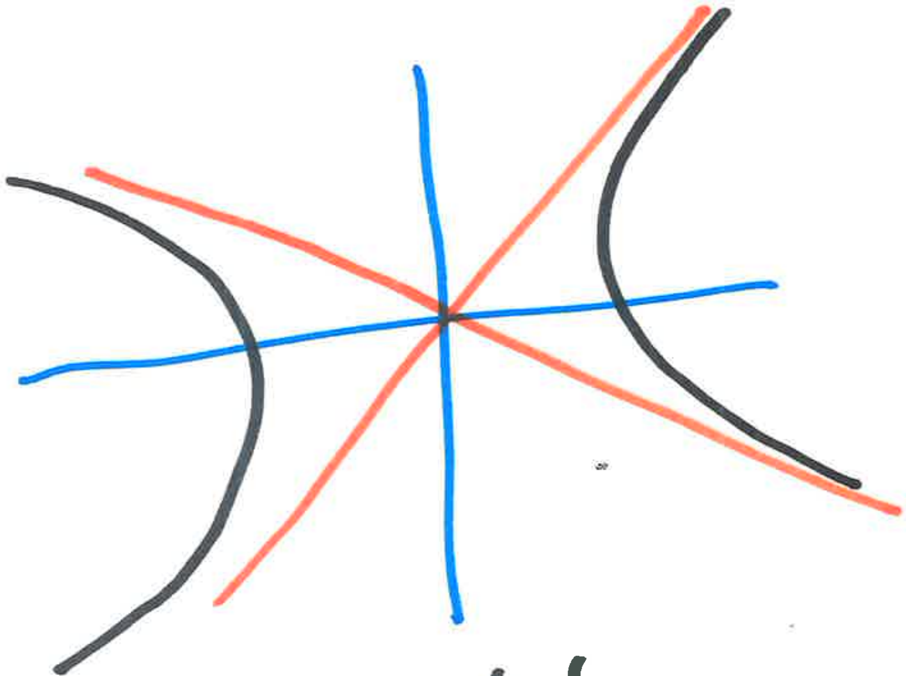
.



parabola



ellisse



iperbole.

Def: Una conica è detta <u>a centro</u> se il suo centro è un punto proprio.

→ CONICHE A CENTRO: ELLISSI, IPERBOLI

→ CONICA NON A CENTRO → PARABOLA.

PARABOLA: conica con $\det A^* = 0$ il suo centro = polo retta impropria coincide proprio con il suo punto improprio.

$$\begin{cases} {}^{T}X A X = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x_1, x_2) A^* \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \cancel{x_1 = -1} \qquad \Delta = 0$$

$$x_1 = \frac{-a_{12}}{a_{11}}$$

$$a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$$

$$[(-a_{12} \quad a_{11} \quad 0)] = \mathcal{C} \text{ parabola.}$$

$$+a_{12}^2 a_{11} + 2a_{12}(-a_{12})a_{11} + a_{11}^2 a_{22}$$

$$+a_{12}^2 a_{11} \mp 2a_{12}^2 a_{11} + a_{11}^2 a_{22} = 0$$

$$= \cancel{a_{22}}$$

$$a_{11}^2 a_{22} - 2a_{11}^2 a_{22} + a_{11}^2 a_{22} = 0$$

Equazione dei diametri

$$a_{11} x + a_{12} y + K = 0$$

<u>parabola</u> $\qquad C = [(-a_{12}\ a_{11}\ 0)]$

- **CONICHE A CENTRO**

$$\begin{cases} (1\ 0\ 0)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \\ (0\ 1\ 0)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

l'intersezione ci fornisce il centro.

DIAMETRI: DATO IL CENTRO SI SCRIVONO LE RETTE PER ESSO.
SI CALCOLANO LE POLARI DIRETTAMENTE.

$$(l \ \ m \ \ 0)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

$$l(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)+m(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{33}x_3)=0$$

equazione dei diametri per una conica a centro.

OSS: OGNI CONICA A CENTRO HA 2 PUNTI IMPROPRI DISTINTI
- REALI SE IPERBOLE
- IMM. CONIUGATI SE ELLISSE.

→ IN PARTICOLARE OGNI CONICA A CENTRO HA DUE ASINTOTI.

- REALI E DISTINTI → IPERBOLE
- IMM E CONIUGATI → ELLISSE.

Un asintoto si può anche ottenere congiungendo il centro con un punto improprio della conica.

DIAMETRI "IMPORTANTI": ASSI

Def: Si dice circonferenza una ellisse che passa per i punti ciclici $J_\infty = [(1, i, 0)]$ e $\overline{J_\infty} = [(1, -i, 0)]$

1) Ogni diametro di una circonferenza è un asse.
2) Se $\mathcal{C}$ è una parabola $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ ha uno ed un solo asse
3) Se $\mathcal{C}$ è una conica a centro che non è circonferenza $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ ha esattamente 2 assi e tali assi sono ortogonali fra loro.

$\mathcal{C}$ A CENTRO:

$$(\ell, m \;\; 0)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\cancel{\ell a_{11}+\ell} \quad \begin{vmatrix} \ell a_{11}+m a_{12} & \ell a_{12}+m a_{22} \\ \ell & m \end{vmatrix} = 0$$

$$m(\ell a_{11}+m a_{12}) - \ell(\ell a_{12}+m a_{22}) = 0$$

$$m^2 a_{12} + m\ell(a_{11}-a_{22}) - \ell^2 a_{12} = 0$$

Se $\mathcal{C}$ circonferenza (generalizzata) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a_{11} = a_{22}$ & $a_{12} = 0$ $\Rightarrow$ eq. $0 = 0$ $\Rightarrow$

OGNI DIAMETRO È UN ASSE.

ALTRIMENTI: $\Delta = \cancel{4(a_{11} - a_{22}) + a_{12}^2}$

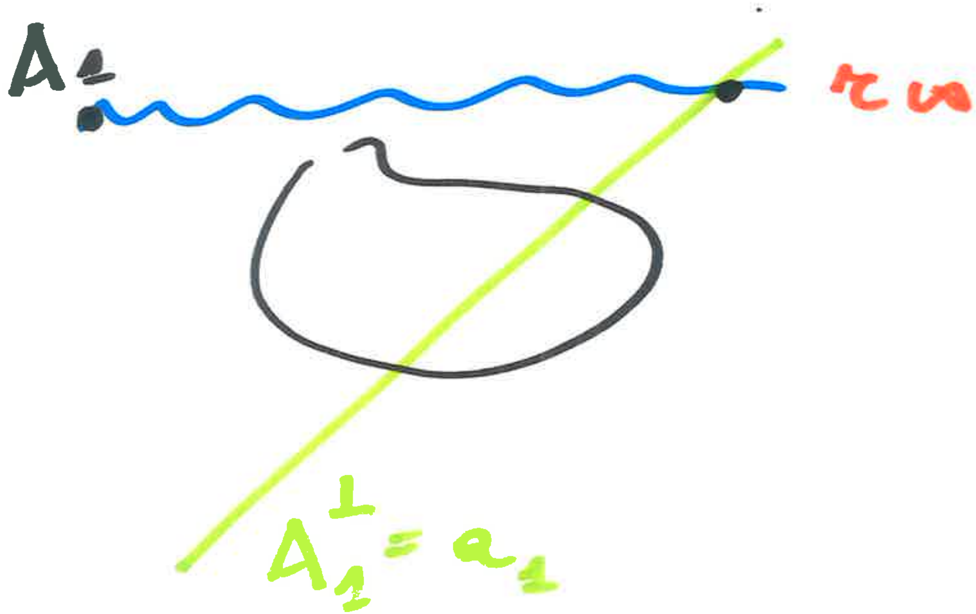
$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 =$$

$$= a_{11}^2 + a_{22}^2 - 2a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 \geqslant 0$$

ed è $= 0$ $\Leftrightarrow$ $a_{12} = 0$ & $a_{11} = a_{22}$

CI SONO SEMPRE 2 SOLUZIONI TRANNE CHE PER IL CASO DELLA CIRCONFERENZA.

$\Rightarrow$ che i 2 assi siano ortogonali si può verificare dalle soluzioni.



Siano a_1, a_2 i due assi di $\mathcal{C}$ e A_1 ed A_2 i rispettivi poli. Asserisco che $A_2 \in a_1$ ed $A_1 \in a_2$

$\Rightarrow a_1 \perp a_2$ perché hanno punti impropri ortogonali.

Per ipotesi a_1 é ortogonale al proprio polo A_1

$$m^2 a_{12} + m\ell(a_{11} - a_{22}) + \ell^2 a_{12} = 0$$

$$\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 - 2a_{11}a_{22} + a_{12}^2 = \cancel{(a_{11}+a_{22})^2}\ a_{11}^2 + a_{22}^2 - 2a_{11}a_{22} + 4a_{11}a_{22} =$$

$$= (a_{11} + a_{22})^2.$$

$$m, \ell = \frac{-(a_{11} - a_{22}) \pm (a_{11} + a_{22})}{4a_{12}} =$$

quindi il punto B improprio di A_1 soddisfa $B^\perp = A_1$. d'altro canto la polare di B deve essere una retta che passa per A_1 e quindi la polare di B deve avere come punto improprio proprio A_1, ma ne segue che la polare di B è ortogonale a B e dunque essa è un asse ($= a_2$).

Facendo il medesimo ragionamento su A_2 si vede $A_2 = B$ e quindi i 2 assi sono ortogonali fra loro.

ASSE DI UNA PARABOLA

$\forall$ diametro ha punto improprio $[(-a_{12}\ a_{11}\ 0)]$ in particolare questa è la direzione del diametro.

Vogliamo un asse ovvero un diametro $\perp$ al proprio polo $\Rightarrow$ vogliamo un polo $\perp$ al centro della parabola $\Rightarrow$ vogliamo che il polo sia $[(a_{11}\ a_{12}\ 0)]$.

Eq. ASSE $\quad (a_{11}\ a_{12}\ 0)\, A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$(a_{11}^2 + a_{12}^2) x_2 + (a_{12} a_{11} + a_{22} a_{12}) x_2 +$$

$$+ (a_{11} a_{13} + a_{12} a_{23}) x_3 = 0.$$

$$a_{11} a_{22} = a_{12}^2.$$

ASSE DELLA PARABOLA