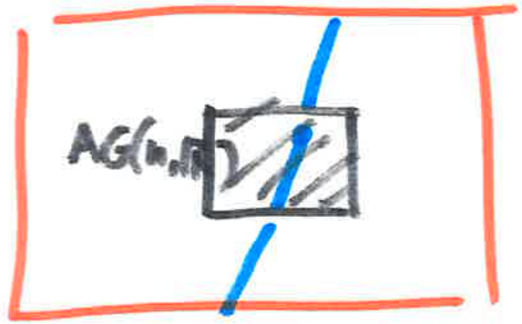
# Ampliamento proiettivo.

COMPLESSIFICAZIONE.

$AG(n,\mathbb{R}) \to \underset{\text{prodotto scalare}}{EG(n,\mathbb{R})} \hookrightarrow AG(n,\mathbb{C}).$




$P = \bar{P}$

$r: y = 2x \qquad P = (i, 2i)$

$P \in r$

$\bar{P} = (-i, -2i) \neq P$

$\bar{r}: y = \bar{2}x \equiv y = 2x \qquad r$ è retta reale.

# AMPLIAMENTO PROIETTIVO.

$\mathbb{K}$ campo

$$AG(n, \mathbb{K}) \hookrightarrow PG(n, \mathbb{K})$$

Supponiamo di avere una equazione del tipo

$$ax + by + c = 0$$

in $AG(2, \mathbb{K})$ $\longrightarrow$ poniamo $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ $\quad x_3 \neq 0$

$$a\frac{x_1}{x_3} + b\frac{x_2}{x_3} + c = 0$$

MOLTIPLICHIAMO PER $x_3$.

$$(*) \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

equazione omogenea in 3 incognite.

OSSERVIAMO CHE (*) HA $\infty^2$ SOLUZIONI E QUESTE SONO un sottospazio vettoriale di dim = 2 di $\mathbb{K}^3$

→ per ogni famiglia di soluzioni con $\tilde{x}_3 \neq 0$ abbiamo che

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\ \tilde{x}_3) \longrightarrow \left(\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_3}, \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_3}\right)$$

sol. di (*) — soluzione di $ax+by+c=0$

$(1,2,3)$ sol. di (*) $\Rightarrow$ $\alpha(1\ 2\ 3)$ sol. di (*)

e $\left(\frac{\alpha \cdot 1}{\alpha \cdot 3}, \frac{\alpha \cdot 2}{\alpha \cdot 3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

AD OGNI CLASSE DI PROPORZIONALITÀ DI VETTORI $[(\tilde{x}_1\ \tilde{x}_2\ \tilde{x}_3)]$ con $x_3 \neq 0$

$$[(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)] := \{ \alpha(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \mid \alpha \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{K} \}.$$

CORRISPONDE UN PUNTO DI $AG(2, \mathbb{K})$.

→ ad una famiglia di soluzioni $[(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)]$ con $\tilde{x}_3 = 0$ corrisponde una soluzione di

$$[a x_1 + b x_2 = 0]$$

ci dà il sottospazio di traslazione della retta = direzione della retta.

$$[(-b, a, 0)]$$

Sia $V_{n+1}(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione $(n+1)$ sul campo $\mathbb{K}$. Fissata una base identifichiamo $V_{n+1}(\mathbb{K})$ con $\mathbb{K}^{n+1}$.

Definiamo la geometria proiettiva $PG(n,\mathbb{K})$ ovvero

$$\mathbb{P}^n\mathbb{K} \quad \text{ovvero} \quad \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$$

come la geometria in cui si chiamano "punti" i sottospazi vettoriali 1-dimensionali di $\mathbb{K}^{n+1}$ e "rette" i sottospazi vett. 2-dimensionali di $\mathbb{K}^{n+1}$ (piani → 3-dim etc. etc.).

Ad ogni punto corrisponde una classe di proporzionalità di vettori di $\mathbb{K}^{n+1}$.

In particolare noi lavoriamo in $\dfrac{\mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\}}{\mathbb{K}\setminus\{0\}}$

ESISTE UNA FUNZIONE INIETTIVA

$$AG(n,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{K}$$

che manda punti in punti e rette in sottoinsiemi delle rette

$n=2$

$$(x,y) \longrightarrow [(x,y,1)]$$

$\cancel{ax+by+c=0}$

$$ax+by+c=0 \longrightarrow ax_1+bx_2+cx_3=0$$

$$x=\frac{x_1}{x_3} \quad y=\frac{x_2}{x_3}$$

più in generale se un sottospazio di $AG(n,\mathbb{K})$ è descritto da un sistema lineare

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = B$$

noi lo immergiamo in $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ come il sott. vettoriale di equazioni omogenee

$$(A|B)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Ad ogni equazione del tipo $f(x_1 \dots x_n) = 0$ in $AG(n,\mathbb{K})$ si associa l'equazione $F(x_1 \dots x_n\, x_{n+1}) = 0$ in $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ con

$$F(x_1 \dots x_n\, x_{n+1}) = x_{n+1}^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_{n+1}} \dots \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$$

OMOGENEIZZAZIONE.

(ogni monomio che compare in $F$ ha lo stesso grado).

$$f(x,y) = x^2 + 2y + 5$$

$$\downarrow$$

$$F(x_1\, x_2\, x_3) = x_3^2 f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = x_1^2 + 2x_2x_3 + 5x_3^2$$

OSS: 1) I punti di $AG(n, \mathbb{K})$ corrispondono ai punti di $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ con la forma

$$[(x_1 \dots x_n\, x_{n+1})] \quad x_{n+1} \neq 0$$

$$= \left[\left(\frac{x_1}{x_{n+1}} \dots \frac{x_n}{x_{n+1}}\, 1\right)\right]$$ PUNTI PROPRI

2) i punti di $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ con $x_{n+1} = 0$

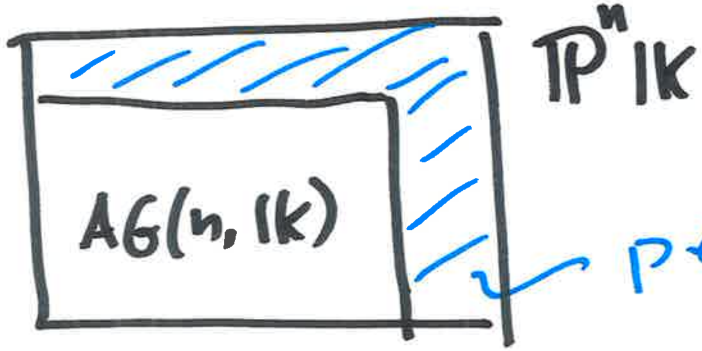
$[(x_1 \dots x_n\ 0)]$ corrispondono

a sottospazi vettoriali di dim $= 1$ nel

sottospazio di traslazione di $AG(n, \mathbb{K})$.

→ corrispondono alle direzioni delle rette di

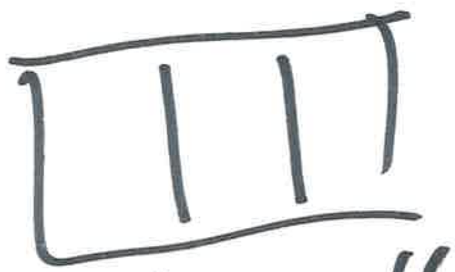
$AG(n, \mathbb{K})$ → PUNTI IMPROPRI.




oss: i punti impropri in $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ sono un sott. vettoriale di dimensione n vettoriale.

passando da $AG(n, \mathbb{K})$ a $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ si aggiunge ad ogni retta un punto improprio che corrisponde alla sua direzione.

$n=2$ $AG(2, \mathbb{K})$ $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$



rette parallele e disgiunte

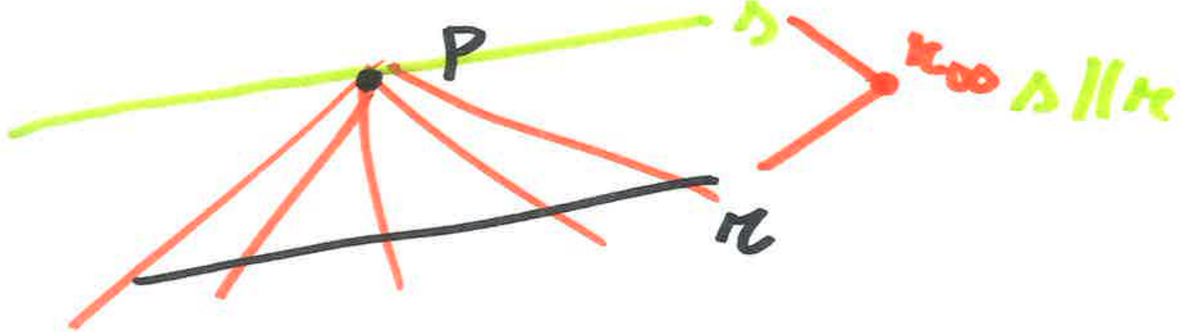
le 2 rette hanno in comune la medesima direzione = punto improprio = "si intersecano all'orizzonte" = si intersecano all'$\infty$.

<u>Teorema</u>: In $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ due rette distinte hanno sempre un punto in comune.

Tale punto è un punto proprio se le rette sono incidenti in $AG(2,\mathbb{K})$ o un punto improprio se le rette sono parallele in $AG(2,\mathbb{K})$.

<u>DIM</u>: $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ corrisponde allo sp. vettoriale $\mathbb{K}^3$. due rette corrispondono ciascuna a sottospazi 2-dimensionali $r$ ed $s$ di $\mathbb{K}^3$. per Grassmann: $\dim(r \cap s) \geq 1$

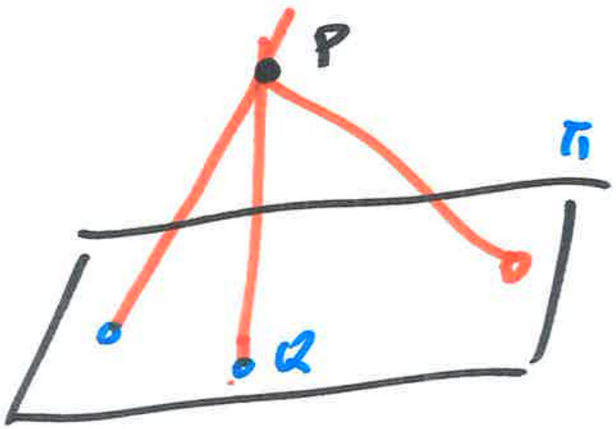
**Teorema:** ci sono tante rette in un fascio di $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ quanti punti su di una retta.




**Teorema:** ci sono tante rette in una stella per un punto P in $\mathbb{P}^3\mathbb{K}$ quanti punti in un piano π di $\mathbb{P}^3\mathbb{K}$.

OSS: In $\mathbb{P}^3\mathbb{K}$ un piano π ed una retta r non in esso contenuta hanno sempre un punto in comune.

DIM: GRASSMANN $\dim(\pi)=3$ $\dim(r)=2$ $3+2=5>4$.




$P \notin \pi$

1) ogni retta per $P$ interseca $\pi$ in esattamente 1 punto

2) $\forall$ punto $Q$ di $\pi$ esiste esattamente una retta $PQ$ per $Q$ e per $P$.

<u>OSS</u>: Un fascio/stella improprio è un fascio/stella ~~proprio~~ di centro punti impropri.

$n=2$


In $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ si dice iperpiano improprio il luogo dei punti di eq. $x_{n+1} = 0$.

Se $n=2$ → retta impropria

Se $n=3$ → piano improprio.

Ad ogni sottospazio affine di <u>dimensione affine</u> $i$ in $AG(n,\mathbb{K})$ corrisponde un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ di <u>dimensione proiettiva</u> $i$ e <u>dimensione vettoriale</u> $i+1$.

$ax+by+c=0$ → $ax_1+bx_2+cx_3=0$

$\infty^2$ soluzioni → $\infty^2$ soluzioni

→ corrisp. ad $\infty^2$ punti.

Inconveniente a lavorare in $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ con coordinate omogenee è che le coordinate dei punti non sono $(n+1)$-uple ma classi di proporzionalità di $(n+1)$-uple.

punto reale in $AG(n, \mathbb{K})$ $\longrightarrow$ punto reale in $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$

$(x_1 \dots x_n) \iff x_i \in \mathbb{R}\ \forall i$

$[(x_1 \dots x_n\ x_{n+1})]$

$\iff \exists$ una ~~(n+1)~~-upla reale $\neq 0$ nella classe di proporzionalità.

$$rk\begin{pmatrix} x_1 \dots & x_n & x_{n+1} \\ \bar{x}_1 \dots & \bar{x}_n & \bar{x}_{n+1} \end{pmatrix} = 1$$

$$P = \overline{P}$$

Se $P = [(x_1 \dots x_n \, x_{n+1})]$ in $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ é proprio
$\Rightarrow$ esso é reale
$\Leftrightarrow$ $\frac{x_1}{x_{n+1}} \dots \frac{x_n}{x_{n+1}} \in \mathbb{R}$.

Se $P = [(x_1 \dots x_n \; 0)]$ in $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ é improprio

$\Rightarrow$ esso é reale se posto $i := \max\{j : x_j \neq 0\}$.

abbiamo $\frac{x_1}{x_j} \dots \frac{x_{j-1}}{x_j} \in \mathbb{R}$.

Teoremi generali in $\mathbb{P}^3\mathbb{K}$:

1) Due piani si intersecano sempre in una retta.
2) Un piano ed una retta si intersecano sempre in un punto.

3) Due rette sono disgiunte $\Leftrightarrow$ esse sono sghembe.

$r = \langle (1\,0\,0\,0), (0\,1\,0\,0) \rangle \qquad s = \langle (0\,0\,1\,0), (0\,0\,0\,1) \rangle$

<u>OSS</u>: Siano $P_1 \dots P_k$ un insieme di punti di $AG(n, \mathbb{K})$ geometricamente indipendenti.
$\Rightarrow \langle P_1 \dots P_k \rangle$ generano un sottospazio $\Pi$ di $AG(n, \mathbb{K})$ di dimensione affine $(k-1)$

Come è fatto il corrispondente sottospazio di $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$?

È esattamente il sottospazio $\tilde{\Pi}$ vettoriale generato dalle immagini $\tilde{P}_1 \dots \tilde{P}_k$ dei punti dati di $AG(n, \mathbb{K})$ in $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$.

$n=2$ retta per $(1,2)$ $(3,5)$ $\longrightarrow$ $\tilde{r} \subseteq \mathbb{P}^2\mathbb{K}$

$r$

$\tilde{r} = \langle (1\,2\,1),(3\,5\,1) \rangle$

retta $s$ per $(1\,2)$ e di direzione $(5,6)$ $\longrightarrow$ $\tilde{s} = \langle (1\,2\,1),(5\,6\,0) \rangle$

$n=3$ piano $\pi$ per $(1\,0\,1)$ $(0\,1\,0)$ $(3\,1\,2)$ $\rightarrow$ $\tilde{\pi} = \langle (1\,0\,1\,1)\,(0\,1\,0\,1)\,(3\,1\,2\,1) \rangle$

punti geometricamente indipendenti
sono rappresentati da vettori indipendenti:

cosa vuol dire che $[(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)] \in \tilde{\pi}$.

$$\operatorname{rk} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = 3$$

in particolare se vogliamo punti propri

$\Rightarrow$ $x_4 = 1$ $\quad x_1 = x$ $\quad x_2 = y$ $\quad x_3 = z$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

<u>N.B</u> funziona tutto anche se mescoliamo punti propri e punti impropri (=direzioni).

piano $\pi$ di $AG(3, \mathbb{K})$ con

1) $\pi$ passa per il punto $(1\ 2\ 3)$
e per il punto $(0\ 1\ 2)$

2) $\pi$ contiene nella sua giacitura
la direzione $(0\ 1\ 0)$.

passiamo in $\mathbb{P}^3 \mathbb{K}$

punti propri → direzione →

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(*)\quad \begin{cases} -x+y+z=1 \\ ky-kz=1 \\ x+3y-5z=1 \end{cases}$$

k tale che (*) stella impropria e trovarne il centro.

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ kx_2-kx_3-x_4=0 \\ x_1+3x_2-5x_3-x_4=0 \end{cases}$$

3 piani

in $\mathbb{P}^3\mathbb{K}$ i tre piani hanno sempre almeno un punto in comune.

vogliamo che il punto sia un punto improprio $\Rightarrow$ AGGIUNGIAMO L'EQ. $x_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & k & -k & -1 \\ 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{equiv.}$$

$$A' = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 1 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & k & -k & 0 \\ \boxed{1} & 3 & \boxed{-5} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

voglio $\infty^1$ soluzioni $\Rightarrow rk(A') = 3$

$rk(A') \geq 3$ $\qquad \det(A') = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & k & -k \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & k & -k \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & k & -k \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$\underline{\forall k}$

i piani formano sempre una stella impropria.

$x_4 = 0$

$x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$

$x_2 - x_3 = 0$

$x_1 = 2x_3$

$x_2 = x_3$

$x_4 = 0$

$[(2\ 1\ 1\ 0)]$

piano affine $AG(2,\mathbb{K})$.

**Def:** Si dice curva algebrica (piana) di grado $n$ l'insieme dei punti di $AG(2,\mathbb{K})$ che soddisfano una equazione $f(x,y)=0$ con $f$ polinomio di grado $n$ in $x$ ed $y$ $n \geq 1$.

$$V(f) := \{ (x,y) \mid f(x,y)=0 \}.$$

$f(x,y)=0$ equazione della curva.

$n=1 \to$ rette

$n=2 \to$ coniche

$V(f) \neq \emptyset$ sempre?

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$. $f(x,y)=x^2+y^2+1$

<u>OSS</u>: Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso $\Rightarrow$
$V(f) \neq \emptyset$ $\forall$ polinomio $f$.

$f(x,1) = 0 \ \forall x \Rightarrow (0,1) \in V(f) \neq \emptyset$

altrimenti: o $f(x,1)$ è non costante o $f(1,y)$ è non costante.

$$f(x,y) = \sum_{\substack{0 \leq i,j \\ i+j \leq n}} a_{ij} x^i y^j$$

c'è almeno un termine di grado $n \geq 1$

se è $\to x^n \Rightarrow f(x,1)$ non è costante

se è $\to y^n \Rightarrow f(1,y)$ non è costante

se è $x^i y^{n-i} \Rightarrow f(x,1)$ non è costante, $0 < i < n$

in particolare almeno uno dei due polinomi $f(x,1)$ e $f(1,y)$ non è costante ed ha grado dunque $>0$ ma $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso $\Rightarrow$ $\exists$ una soluzione $\Rightarrow V(f) \neq \emptyset$.

$\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{C} \quad \text{aiuta}}$

Vorremmo poter descrivere $V(f)$ in termini geometrici $\rightarrow$ questo è difficile

Vogliamo però dimostrare questo teorema.

Teorema dell'ordine.

Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e sia $f(x,y)=0$ una equazione di una curva algebrica di grado $n$ in $AG(2,\mathbb{K})$.

Poniamo $F(x_1,x_2,x_3) = x_3^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$ ed indichiamo con $\tilde{\mathcal{V}}(F)$ l'insieme di tutti i punti di $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ che soddisfano l'equazione omogenea $F(x_1 x_2 x_3)=0$.

Allora: ogni retta di $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ interseca $\tilde{\mathcal{V}}(F)$ in esattamente $n$ punti, a patto di contarli con la dovuta molteplicità e che la retta non sia contenuta in $\mathcal{V}(F)$.

Il teorema lega una proprietà algebrica (= grado di $f$ = grado di $F$) con una proprietà geometrica (= numero di intersezioni con una retta non contenuta).