Geometria Euclidea

- Geometria Affine sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dotata di un prodotto scalare definito positivo

  → distanza fra punti

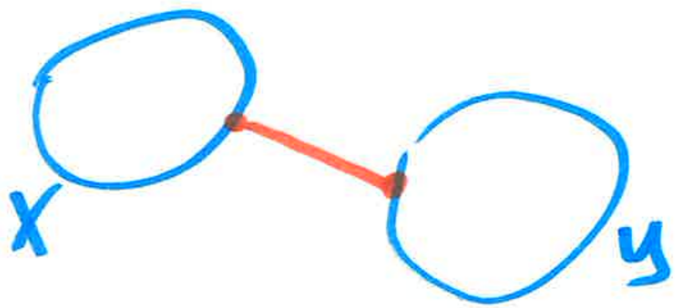
  → ortogonalità / angolo fra vettori

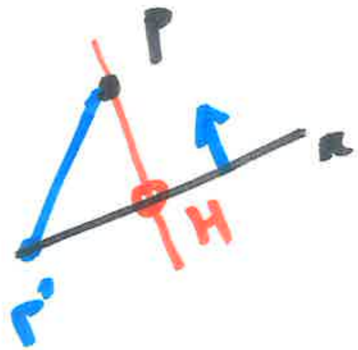
  → lunghezza di un segmento / lunghezza di una curva.

$d_H((1,2,3), (98,2,3)) = 1$ NON CORRISPONDE ALL'IDEA "INTUITIVA" DI LUNGHEZZA DI UN SEGMENTO.

DISTANZA FRA SOTTOINSIEMI / SOTTOSPAZI DISGIUNTI.

$$d(X,Y) := \min \{ d(P,Q) \mid P \in X, Q \in Y \}$$

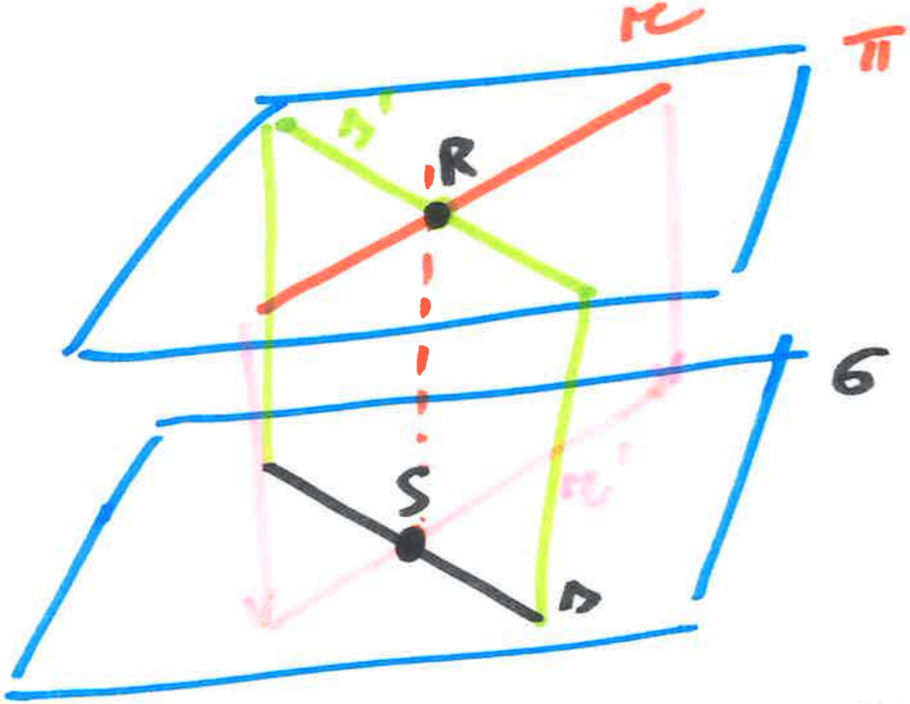




$r: ax+by+c=0$

$P=(x_0,y_0)$

$$\Rightarrow d(P,r) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



r ed s SGHEMBE

$d(r,s) \geq d(\pi,\sigma)$

con $\pi // \sigma$

$d(r,s) = d(\pi,\sigma)$

DOBBIAMO FAR VEDERE CHE $\exists P \in r$: la proiezione ORTOGONALE DI P su σ è un punto di s.

proiettiamo ortogonalmente r su $\sigma \Rightarrow r' \subseteq \sigma$ che non è parallela ad s. $S = r' \cap s$

proiettiamo ortogonalmente s su $\pi \Rightarrow s' \subseteq \pi$ non $//$ r.

La retta RS é ortogonale a π; ortogonale a σ ed interseca r in R ed s in S.

$\Rightarrow d(r,s) \leq d(R,S) = d(\pi,\sigma)$

<u>Def</u>: La retta RS é detta <u>retta di minima distanza</u> fra r ed s.

Geometria euclidea → luoghi geometrici:

→ descritti in termini di proprietà "metriche"

→ da "tradursi" in configurazioni geometriche.

→ ASSE DI UN SEGMENTO.

→ CIRCONFERENZA (e CIRCONF. GENERALIZZATA).

• $EG(2, \mathbb{R})$ piano euclideo.

<u>Def</u>: Si dice circonferenza il luogo dei punti a distanza $d>0$ fissata da un punto C detto centro.

→ riferimento euclideo. $P=(x_0\ y_0)$ $Q=(x_1\ y_1)$

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}$$

(*) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = d^2$ con $C=(x_0\ y_0)$

OSS 1: $d=0$ ha senso → in questo caso la "circonferenza" è un unico punto.

2: in teoria potremmo anche scrivere equazioni del tipo $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=-2$

con $d \in \mathbb{R}$ (non nec. $d \geq 0$).

ma se $d<0 \Rightarrow$ NON ESISTONO PUNTI REALI CHE SODDISFANO L'EQUAZIONE.

(*) $x^2-2xx_0+x_0^2+y^2-2yy_0+y_0^2-d^2=0$

$$x^2+2a_{13}x+y^2+2a_{23}y+a_{33}=0$$

circonferenza in $AG(2,\mathbb{R})$

con $a_{13}=-x_0$

$a_{23}=-y_0$

$a_{33}=x_0^2+y_0^2-d^2=a_{13}^2+a_{23}^2-d^2$

da cui $a_{13}^2+a_{23}^2-a_{33}\geq 0$

$PG(2,\mathbb{R})$

$$x_1^2+2a_{13}x_1x_3+x_2^2+2a_{23}x_1x_3+a_{33}x_3^2=0$$

EQ. OMOGENEA

(*) $$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

↑

MATRICE ASSOCIATA ALLA CIRCONFERENZA.

COSA RAPPRESENTA L'EQUAZIONE GENERALE (*)?

a) una circonferenza $a_{13}^2 + a_{23}^2 > a_{33}$

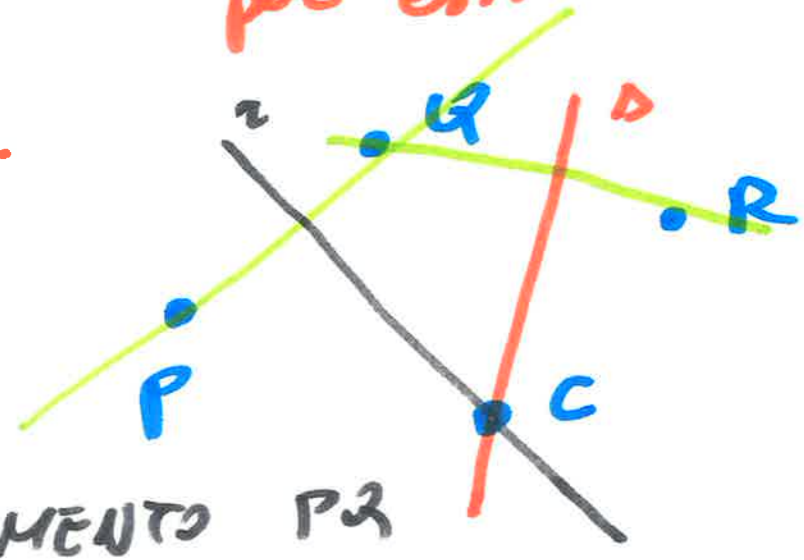
b) un punto $a_{13}^2 + a_{23}^2 = a_{33}$

c) $\emptyset$ $a_{13}^2 + a_{23}^2 < a_{33}$.

Teorema: per 3 punti non allineati passa una ed una sola circonferenza.

DIM METODO 1: 3 punti non allineati definiscono 3 condizioni lineari indip. sui parametri a_{13}, a_{23}, a_{33}
$\rightarrow \exists!$ eq. che descrive la circonferenza per essi $\square$.

METODO 2.



r: ASSE SEGMENTO PQ

s: ASSE SEGMENTO QR.

poiché P, Q ed R NON SONO ALLINEATI: $r \not\parallel s$. $\Rightarrow C = r \cap s$

ed osserviamo che $d(C,R) = d(C,Q)$
(C è in s).
$d(C,P) = d(C,Q)$

(C è in r)

$\Rightarrow$ l'unica circonferenza che contiene
P, Q, R deve avere centro C
e raggio $d(C,P) = d(C,Q) = d(C,R)$. $\square$

→ <u>COMPLESSIFICAZIONE</u>: invece che lavorare su $\mathbb{R}$, lavoriamo su $\mathbb{C}$, ma ricordandoci quali siano i punti "reali".

Supponiamo di avere $AG(n, \mathbb{C})$ con un rif. fissato. Definisco un punto $P \in AG(2, \mathbb{C})$ come <u>reale</u> se

$$P = (x_P, y_P) \quad \text{con } (x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$$

Questo è equivalente a dire che

$$P \text{ é reale} \iff P = (x_P, y_P) \equiv \overline{P} = (\overline{x_P}, \overline{y_P}).$$

P é reale $\iff$ coincide col suo complesso coniugato.

passiamo a $PG(2, \mathbb{C}) \rightarrow$ Punti sono sottospazi 1-dimensionali di $\mathbb{C}^3$.

$$P = \{\alpha(x_{1,P}, x_{2,P}, x_{3P}) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

__Def:__ Diciamo che $P \in PG(2,\mathbb{C})$ è un punto __reale__ se $P = \overline{P}$ cioè se $\{\alpha(x_{1,P}, x_{2,P}, x_{3,P}) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} =$

$$= \{\overline{\alpha}(\overline{x_{1,P}}, \overline{x_{2,P}}, \overline{x_{3,P}}) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

__N.B.__ sono sp. vettoriali su $\mathbb{C}$ non su $\mathbb{R}$.

Un punto reale può avere __anche__ coordinate immaginarie.

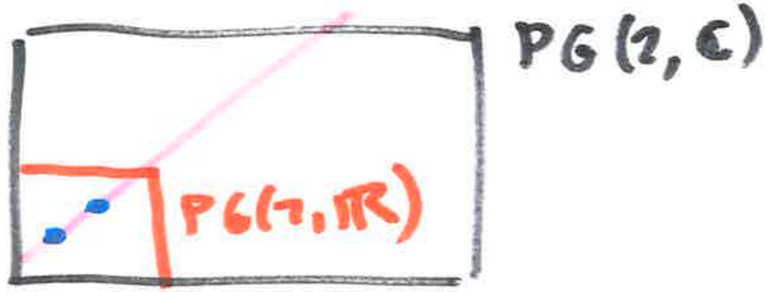
__Teorema:__ Sia $P \in PG(2,\mathbb{C})$ un punto. Allora P é reale $\Leftrightarrow$ esso ammette almeno una rappresentazione in coordinate omogenee con un vettore $[(a,b,c)]$ con $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

CONSEGUENZA DEL TEOREMA: possiamo immergere

$$PG(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow PG(2, \mathbb{C})$$

cioè esiste una funzione che consente di vedere i punti di $PG(2, \mathbb{R})$ come punti di $PG(2, \mathbb{C})$.

[ovviamente la stessa cosa vale per $PG(n, \mathbb{R})$ e $PG(n, \mathbb{C})$].



Def: Una curva algebrica $\mathcal{C}$ di $PG(2, \mathbb{C})$ è detta reale $\iff \mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}}$.

Dim teorema.

1) Sia $P = [(a,b,c)]$ un punto di $PG(2,\mathbb{C})$ con $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$$P = \{\alpha(a,b,c) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} = \{\bar{\alpha}(a,b,c) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

ma $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = (a,b,c)$

$$\Rightarrow P = \{\bar{\alpha}(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} = \{\overline{\alpha(a\ b\ c)} \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$$= \bar{P}$$

2) Supponiamo $P = \{\alpha(a,b,c) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} = \bar{P} =$

$$= \{\alpha(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

<u>oss</u>: Se $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(a, b, c) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a = i\alpha$, $b = i\beta$, $c = i\gamma$ $\quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow (a, b, c) = i(\alpha, \beta, \gamma)$.

ma $-i \in \mathbb{C} \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = -i(a, b, c) \in P$

$\Rightarrow P = [(\alpha, \beta, \gamma)]$ con $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

Supponiamo ora $\overline{(a, b, c)} \neq -(a, b, c)$

poiché P è uno sp. vettoriale e $P = \overline{P}$

$(a, b, c), \overline{(a, b, c)} \in P \Rightarrow (a, b, c) + \overline{(a\ b\ c)} \in P$

$$(a,b,c)+\overline{(a,b,c)} = (a+\bar{a}, b+\bar{b}, c+\bar{c}) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}.$$

$\Rightarrow (a+\bar{a}, b+\bar{b}, c+\bar{c})$ è un vettore che genera P visto come sp. vettoriale di dim 1

$\Rightarrow P = [(a+\bar{a}, b+\bar{b}, c+\bar{c})]$ con

$(a+\bar{a}, b+\bar{b}, c+\bar{c}) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}.$ $\square$

Esempio: $[(1,1,0)] \in PG(2,\mathbb{C})$ è reale.

$$\begin{array}{c} [(i,i,0)] \\ \shortparallel \\ [(1,1,0)] \end{array} \in PG(2,\mathbb{C}) \text{ è reale}$$

il punto $[(1+i, 2+2i, 5+5i)]$ é reale.

$$(1+i, 2+2i, 5+5i) + \overline{(1+i, 2+2i, 5+5i)}$$
$$= (2, 4, 10) \in \mathbb{R}^3.$$

il punto $[(1, i, 2)]$ non é reale.

OSS: $(1, i, 2) + \overline{(1, i, 2)} = (2, 0, 4)$

MA $(2 0 4)$ NON È PROPORZIONALE AD $(1, i, 2)$ e quindi $(2, 0, 4) \notin P$

$\Rightarrow P \neq \overline{P} \Rightarrow P$ non é reale $\square$

CURVA $\mathcal{C}$ reale $\Leftrightarrow \mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}}$ N.B. questo NON IMPLICA CHE TUTTI I PUNTI DI $\mathcal{C}$ siano

Reali ... anzi... !

Teorema: Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica in $PG(2,\mathbb{C})$.
Allora $\mathcal{C}$ è reale $\iff$ $\mathcal{C}$ ammette una equazione omogenea $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ con $F(x_1, x_2, x_3)$ polinomio a coeff. reali omogeneo.

DIM. Se $F(x_1, x_2, x_3)$ è polinomio a coeff. reali

$$\Rightarrow \mathcal{C} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid F(x_1, x_2, x_3) = 0\} =$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3) \mid \overline{F}(x_1, x_2, x_3) = 0\} =$$

$$= \{(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \mid \overline{F}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = 0\} =$$

$$\cancel{= \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \mid F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0\} = \bar{\mathcal{C}}}$$

$$= \{\overline{(x_1, x_2\, x_3)} \mid \overline{F(x_1, x_2\, x_3)} = 0\} =$$

$$= \{\overline{(x_1, x_2\, x_3)} \mid F(\bar{x}_1, \bar{x}_2\, \bar{x}_3) = 0\}.$$

ma F ha coeff. reali $\Rightarrow F(\bar{x}_1, \bar{x}_2\, \bar{x}_3) = 0$

$$\Leftrightarrow F(x_1, x_2\, x_3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad = \{\overline{(x_1, x_2\, x_3)} \mid F(x_1, x_2\, x_3) = 0\} = \bar{\mathcal{C}}$$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ è reale.

Viceversa: $\mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}} \Leftrightarrow$ la curva di equazione $F(x_1, x_2\, x_3) = 0$ è la stessa di equazione $F(\bar{x}_1, \bar{x}_2\, \bar{x}_3) = 0$

$\Rightarrow$ in particolare ~~tutti i punti~~

$F(x_1, x_2\, x_3) = 0$ é equivalente a

$\overline{F(x_1\, x_2\, x_3)} = 0$ cioé $\overline{F}(\bar{x}_1, \bar{x}_2\, \bar{x}_3) = 0.$

Dunque $F(\bar{x}_1, \bar{x}_2\, \bar{x}_3) = 0$ e

$\overline{F}(\bar{x}_1, \bar{x}_2\, \bar{x}_3) = 0$ sono

equivalenti come equazioni.

a) $\overline{F}(\bar{x}_1, \bar{x}_2\, \bar{x}_3) = -F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ come prima abbiamo che

$F(\bar{x}_1, \bar{x}_2\, \bar{x}_3) = i\, G(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ con G

a coeff. reali $\Rightarrow$ la curva ammette $G(x_1, x_2, x_3) = 0$

come equazione.

b) $\bar{F} \neq -F \Rightarrow G = \bar{F} + F$

ed osserviamo che G è a coeff. reali

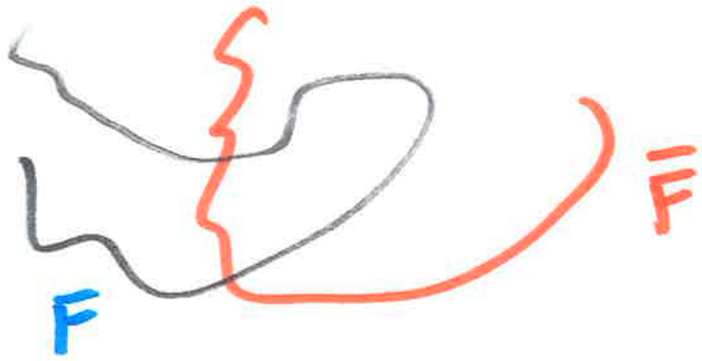
ed al contempo $\forall [(x_1, x_2, x_3)] \in \mathcal{C}$:

$$G(x_1, x_2, x_3) = \underset{\in \mathcal{C}}{\underset{\parallel}{\underset{0}{F(x_1, x_2, x_3)}}} + \underset{\in \bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}.}{\underset{\parallel}{\underset{0}{\bar{F}(x_1, x_2, x_3)}}} = 0$$

Viceversa: Se $[(x_1, x_2, x_3)]$ appartiene alla curva di eq. $G = 0 \Rightarrow$

$$F(x_1, x_2, x_3) = -\bar{F}(x_1, x_2, x_3).$$

~~ma in generale~~ e questo per un teorema generale (Bezout). implica $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ (serve il fatto che abbiamo ∞ punti).



Due curve di grado n nel piano o hanno in comune una curva di grado $d \leq n$ oppure si intersecano in al più n^2 punti.

$\underbrace{G = 0}_{\text{HA LO STESSO GRADO (O COMUNQUE NON } >\text{) DI } F+\bar{F}}$

$\underbrace{F = 0 \qquad \bar{F} = 0}_{\text{HANNO GLI STESSI PUNTI.}}$

$F+\overline{F}$ coincide con $F=\overline{F}$.

<u>DIM:</u> $F+\overline{F}$ non è l'equazione $0=0$

ma $(F+\overline{F})\cap F$ ha più di $(\deg F)^2$

punti (contiene tutta F)

$\deg(F+\overline{F}) \leq n = \deg F$.

NE SEGUE $F+\overline{F} \equiv F$.

$\square$

Def: Una retta in $PG(2,\mathbb{C})$ è reale $\iff$ ha eq. del tipo ~~$ax+by+c=$~~ $ax_1+bx_2+cx_3=0$

con $a,b,c\in\mathbb{R}$.

$r: 2x_1+3x_2+5x_3=0$

N.B.: $[(-3,2,0)]$ pto reale di r

$[(1+i,1,-\frac{5+2i}{5})]=$

$=[(1+i,1,-1-\frac{2}{5}i)]$ pto. non reale.

OSS: Sia r una retta di $PG(2,\mathbb{C})$.
Se r ha 2 punti reali $\Rightarrow r$ è reale.

OSS.2: Ogni retta di $PG(2,\mathbb{C})$ ha almeno un punto reale.

DIM: sia r retta. Consideriamo $P = r \cap \bar{r}$

$\Rightarrow \bar{P} = \bar{r} \cap \bar{\bar{r}} = \bar{r} \cap r = P \Rightarrow P$ è reale. $\square$

Le rette di $PG(2,\mathbb{C})$ con un solo punto reale sono dette rette immaginarie.

$$x_1^2 + x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

1) punti impropri: $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad [(1,i,0)] = J_\infty$, $\quad [(1,-i,0)] = \bar{J}_\infty$

punti ciclici del piano.

2) raggio $d = 0$.

$C = [(x_c, y_c, 1)]$

$\| $

(x_c, y_c)

$PG(2, \mathbb{C})$

$$\cancel{(x_1 - y_1)^2 + (x_1 - y_1)}$$

$$(x_1 - x_c x_3)^2 + (x_2 - y_c x_3)^2 = 0$$

su $\mathbb{R}$ unica sol. possibile

$x_1 = x_c x_3 \qquad x_2 = y_c x_3 \qquad [(x_c, y_c, 1)]$

EQ. AFFINE $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = 0$

$$\cancel{(x - x_c + y - y_c)^2}$$

$$(x - x_c + i(y - y_c))(x - x_c - i(y - y_c)) = 0$$

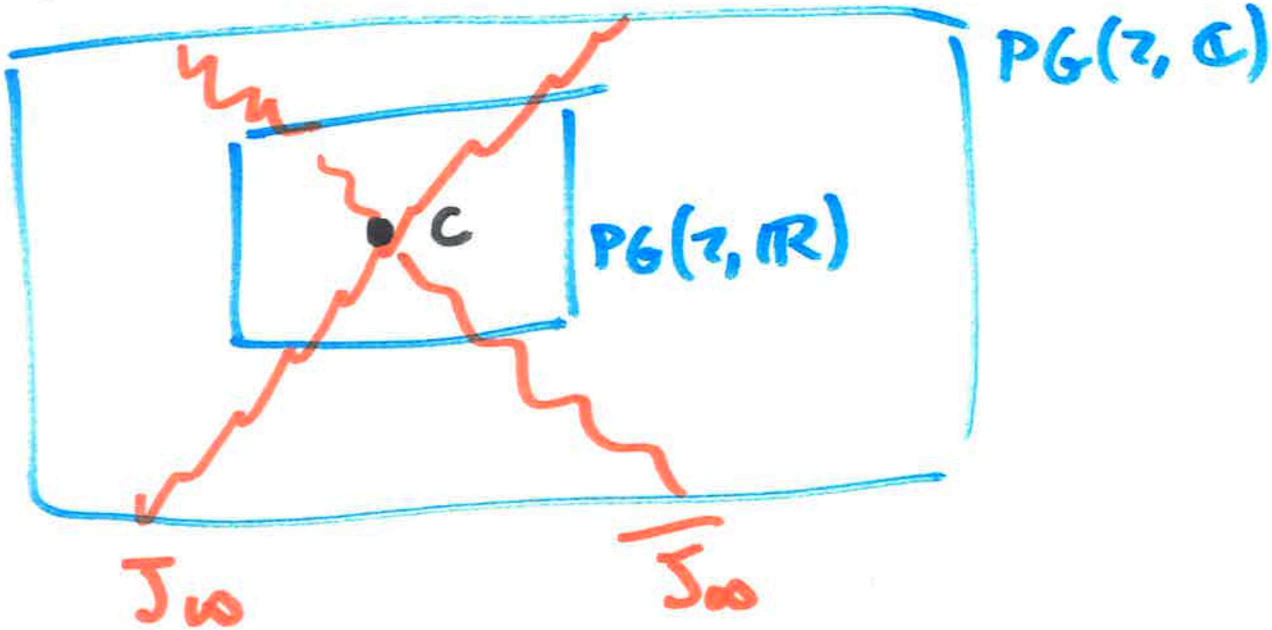
$$(x_1 + i x_2 - (x_c + i y_c) x_3)(x_1 - i x_2 - (x_c - i y_c) x_3) = 0$$

ADESSO LA CURVA SI SPEZZA NELL'UNIONE DI 2 RETTE:

$$(x_1 + i x_2 - (x_c + i y_c) x_3) = 0$$

$$(x_1 - i x_2 - (x_c - i y_c) x_3) = 0$$

passanti per i punti $[(1, i, 0)] = J_\infty$ e $[(1, -i, 0)] = \bar{J}_\infty$ rispettivamente.



Def: Una retta per J_∞ o per $\bar{J}_\infty$ è detta <u>retta isotropa</u> del piano, ($r \neq \ell_\infty$).

In particolare le rette isotrope in $AG(2,\mathbb{C})$ hanno coeff. angolare $+i$ oppure $-i$.

Oss: Sia r_0 una retta isotropa di $AG(2,\mathbb{C})$ e consideriamo il prod. scalare std di $EG(2,\mathbb{C}) \hookrightarrow AG(2,\mathbb{C})$.

1) Allora tutti i punti di r_0 sono a distanza $=0$ gli uni dagli altri.

1) Inoltre: sia P un punto. Il luogo ~~dei~~ dei punti a distanza $=0$ da P in $AG(2,\mathbb{C})$ è

dato dall'unione delle 2 rette isotrope per P.

<u>DIM</u>: 2) immediato → otteniamo una circ. di raggio $=0$ → si spezza ~~in~~ nelle 2 rette isotrope per P.

1) ~~$(x-x_0)=i(y-y_0)$~~ $(y-y_0)=\pm i\,(x-x_0)$.

Siano (x_1, y_1), (x_2, y_2) punti su $y=\pm i x + b$

$P = (x_1, \pm i x_1 + b)$

$Q = (x_2, \pm i x_2 + b)$

$$d(P,Q)^2 = (x_1-x_2)^2 + (\pm i x_1 + b \mp i x_2 - b)^2$$
$$= (x_1-x_2)^2 + i^2 (x_1-x_2)^2 = 0. \ \square$$

$n=3$ (o comunque $n>2$)

Definizioni: P reale $\iff P=\overline{P}$ $\iff$ P ammette coordinate reali.

Σ superficie alg. reale $\iff \Sigma=\overline{\Sigma}$ $\iff$ Σ ammette una eq. a coeff. in $\mathbb{R}$.

$\mathcal{C}$ curva alg. reale $\iff \mathcal{C}=\overline{\mathcal{C}}$ $\iff$ $\mathcal{C}$ ammette una descriz. in termini di un sistema di eq. reali.

<u>Rette:</u> r retta reale $\iff r=\overline{r} \iff r$ é intersezione di 2 piani reali.

se r retta: $r \cap \bar{r} = P \Rightarrow r$ è detta retta immaginaria di I specie e le rette r ed $\bar{r}$ sono complanari.

$r \cap \bar{r} = \phi \Rightarrow r$ è sghemba rispetto $\bar{r}$ ed r è detta retta immaginaria di II specie.

<u>OSS</u>: le rette imm. di prima specie sono contenute anche in piani reali. Quelle di II specie <u>NO</u>

1) <u>Teorema</u>: ogni piano π di $PG(3, \mathbb{C})$ contiene una retta reale.

<u>DIM</u>: se π reale $\Rightarrow$ ok. se π non reale $\Rightarrow \pi \neq \bar{\pi}$
$r = \pi \cap \bar{\pi} = \bar{\pi} \cap \pi = \bar{r}$.

$\square$

7) Un piano è reale $\iff \pi = \overline{\pi} \iff$ ammette una eq. reale.

$$\pi : a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0$$

se π ammette eq. reale $\Rightarrow$

$\overline{\pi}$ ha eq. $\overline{a} x_1 + \overline{b} x_2 + \overline{c} x_3 + \overline{d} x_4 = 0$

$$\begin{array}{cccc} \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} \\ \| & \| & \| & \| \\ a & b & c & d \end{array}$$

ma

$\Rightarrow \pi = \overline{\pi}$

Se $\pi = \overline{\pi} \Rightarrow \Rightarrow$

$\overline{a} x_1 + \overline{b} x_2 + \overline{c} x_3 + \overline{d} x_4 = 0$

$a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0$

sono equivalenti $\Rightarrow$

$$rk \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$$

1) $(\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\ \bar{d}) = \alpha(a\ b\ c\ d)$

con $\alpha = 1 \Rightarrow$ l'eq. è già reale.

2) $(\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\ \bar{d}) = \alpha(a\ b\ c\ d)$ con $\alpha = -1$

$\Rightarrow$ le eq. sono equivalenti ad.

infa $ia\,x_1 + ib\,x_2 + ic\,x_3 + id\,x_4 = 0$

con $ia, ib, ic, id \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ok.

3) $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}) = \alpha(a\ b\ c\ d)$ $\alpha \neq \pm 1$

$\Rightarrow$ prendiamo come equazioni

$(\bar{a}+a)x_1 + (\bar{b}+b)x_2 + (\bar{c}+c)x_3 + (\bar{d}+d)x_4 = 0$

e questa è una equazione reale.

$\square$

rette: intersezione di 2 piani.

$r_6 = \pi \cap 6$ con $\pi, 6$ piani reali $\Rightarrow$

$r_6 = \pi \cap 6 = \overline{\pi} \cap \overline{6} = \overline{r}$

r_6 reale.

ALTRIMENTI: Supponiamo $r_6 = \overline{r_6}$

e siano $P, Q \in r_6$.

poiché $r_6 = \overline{r}$ se $[(P_1, P_2, P_3, P_4)] \in r_6$

$\Rightarrow [(P_1+\overline{P_1}\ \ P_2+\overline{P_2}\ \ P_3+\overline{P_3}\ \ P_4+\overline{P_4})] \in r$

in particolare r_6 contiene sicuramente almeno 2 punti reali $\Rightarrow r_6$ appartiene all'intersezione di 2 piani reali.

(lo si trova scrivendo in $\mathbb{R}$ l'eq. della retta per i 2 punti reali trovati).

Viceversa: se r_0 ammette equazioni a coeff in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow r = \bar{r} \Rightarrow r_0$ è reale.

Esercizio: Si determinino delle equazioni reali per la retta reale del piano

$\pi.\ x + 2iy + z + 5i = 0$

Sol: $\quad r_0 = \pi \cap \bar{\pi}$

$$r: \begin{cases} x + 2iy + z + 5i = 0 \\ x - 2iy + z - 5i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i(x+z)=0 \\ 2(2iy+5i)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ i(2y+5)=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ 2y+5=0 \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} ix+3i=0 \\ y+5z=0 \end{cases}$$ eq. reali (se esistono)

$$r: \begin{cases} x+3=0 \\ y+5z=0 \end{cases}$$

Riconoscere se una retta è immaginaria ed in tal caso di quale specie.

$$r \begin{cases} a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0 \\ a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 + d' x_4 = 0 \end{cases}$$

$r \cap \bar{r}$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \\ \bar{a}' & \bar{b}' & \bar{c}' & \bar{d}' \end{bmatrix} & \begin{matrix} r \\ \\ \bar{r} \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

3 possibilità

1) $rk(A) = 2 \Rightarrow \bar{r} = r \Rightarrow$ r è reale.

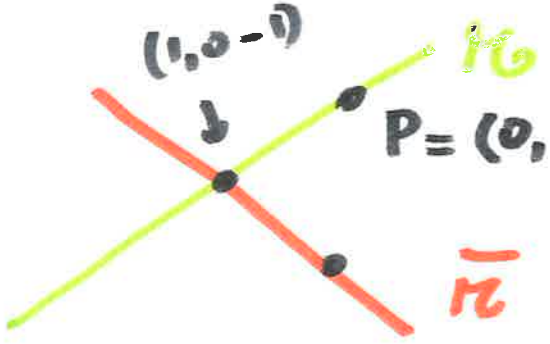
2) $rk(A) = 3 \Rightarrow r \cap \bar{r} = P$ r immaginaria di I specie.

3) $rk(A) = 4 \Rightarrow r \cap \bar{r} = \phi$ r immaginaria di II specie.

$$r \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+iy=1 \end{cases}$$

imm. I specie.

Trovare un piano reale che la contenga.



$P=(0,-i,i)$ $\qquad (1,0,-1)\in r\cap\bar{r}$

$\bar{P}=(0,i,-i)$

DETERMINIAMO IL PIANO PER I 3 PUNTI DATI.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -i & i & 1 \\ 0 & i & -i & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -i & i & 1 \\ i & -i & 1 \end{vmatrix} - y \dots \qquad = 0$$