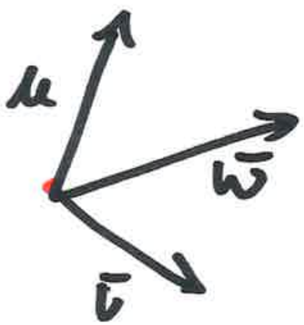
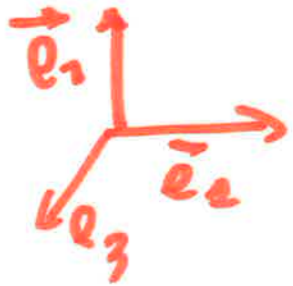
- prodotto vettoriale di $\bar{v} \times \bar{w}$ è un vettore ortogonale a $\bar{v}$ ed a $\bar{w}$

$$\bar{v} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 = \bar{w} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$$

ma tale che il prodotto scalare di tale vettore per un vettore $\bar{u}$ ci dia il "volume orientato" del prisma determinato da $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$



$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0\,0\,1)$$



prodotto vettoriale

$$V_3(\mathbb{R}) \times V_3(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R})$$

fissata una base $\mathcal{B} = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3)$ ortonorm.

e 2 vettori $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\bar{w} = (w_1\ w_2\ w_3)$

$$\bar{v} \times \bar{w} := \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \bar{e}_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + \bar{e}_2 (v_1 w_3 - v_3 w_1) + \bar{e}_3 (v_2 w_3 - v_3 w_2).$$

$\bar{u} \in V_3(\mathbb{R}) \qquad \bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = (u_1\ u_2\ u_3) \cdot \det\begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \wedge \bar{w})$$

<u>wedge</u>

$$(a \wedge b) \approx \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

Matrici quadrate, autovalori, autovettori e diagonalizzazione.

In $\mathbb{K}^n$ data $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ possiamo considerare la funzione lineare $f: \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$

In generale AX può essere un vettore che è diverso da X

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ci chiediamo se e quando $\exists\, X \in \mathbb{K}^n$ con $X \neq \underline{0}$ tali che $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ con

$$AX = \lambda X$$

ci chiediamo se ci sono dei vettori speciali che sono mandati da A in vettori proporzionali.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \times$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \times$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark \qquad \lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = -1 \qquad \checkmark$$

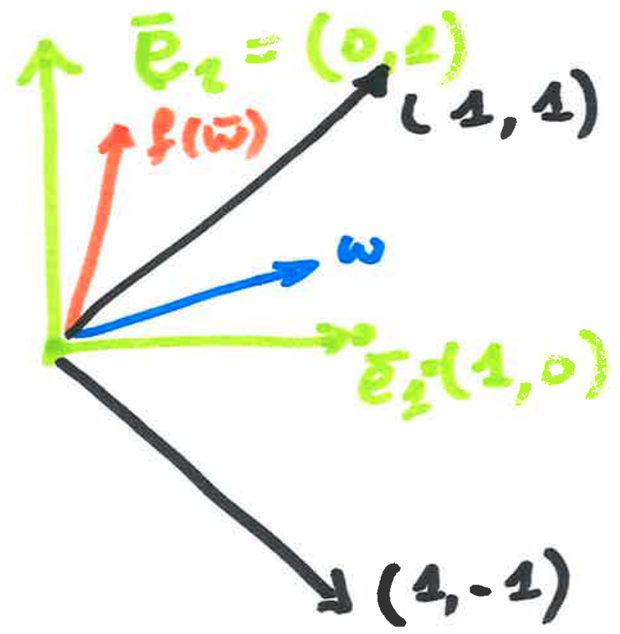
supponiamo di passare dalla base

$\mathcal{B} = ((1\ 0), (0\ 1))$

alla base $\mathcal{B}' = ((1\ 1), (1, -1))$.

la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$ è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

rispetto a $\mathcal{B}'$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



Def.: Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Si dice autovettore di A di autovalore λ ogni vettore $X \in \mathbb{K}^n$ tale che $AX = \lambda X$ con $X \neq \underline{0}$.

(eigenvector / eigenvalue).

$$A\underline{0} = \underline{0}$$

2) Due matrici A e $B \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono dette simili se $\exists\ P \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che $A = P^{-1}BP$.

(due matrici simili rappresentano la medesima applicazione lineare rispetto basi differenti).

a) Se A è simile a $B \Rightarrow B$ è simile ad A

$$A = P^{-1}BP \Rightarrow B = PAP^{-1}$$

b) A è simile a se stessa $\quad A = I^{-1}AI$

c) Se A è simile a B e B è simile a C $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ A è simile a C.

$$A = P^{-1}BP \qquad B = Q^{-1}CQ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = P^{-1}Q^{-1}CQP = (QP)^{-1}C(QP)$$

La relazione di "essere simili" è una relazione di equivalenza su $\mathbb{K}^{n,n}$.

OSS: Due matrici simili hanno stesso determinante (per Binet) e stesso rango.

Supponiamo che $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ e che esista una base $\mathcal{B}$ di autovettori per A. Allora A è simile ad una matrice diagonale. (in realtà)

<u>Teorema</u>: A simile a D matrice diagonale $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists$ base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^n$ di autovettori per A.

<u>DIM</u>: A simile a $D \Leftrightarrow \exists P \in GL(n, \mathbb{K})$ con
$P^{-1}AP = D$ cioè $\boxed{AP = PD.}$

($\Leftarrow$) supponiamo che $\exists$ una base di autovettori per A. mettiamo a colonna le comp. di questi autovettori $v_1\ v_2 \dots v_n$ nella matrice $P \Rightarrow$

$$A[v_1\ v_2 \dots v_n] = [Av_1\ Av_2 \dots Av_n] =$$

$$= [\lambda_1 v_1\ \lambda_2 v_2\ \dots\ \lambda_n v_n] =$$

$$= [v_1\ v_2\ \dots\ v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

A è simile ad una matrice diagonale D.

($\Rightarrow$) Viceversa: supponiamo $AP = PD$ e siano $C_1 \dots C_n$ le colonne di P e $\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix} = D$

$$\Rightarrow A[C_1 \dots C_n] = [C_1 \dots C_n] \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [AC_1 \dots AC_n] = [d_1 C_1 \dots d_n C_n]$$

$$\Rightarrow AC_i = d_i C_i \quad \forall i$$

$\Rightarrow$ le colonne di P sono una base di autovettori per A.

$\square$

<u>Def</u>: Una matrice A è detta <u>diagonalizzabile</u> in $\mathbb{K}$ se essa è simile ad una matrice diagonale.

Come trovare gli autovettori di A?

X autovettore di A $\Leftrightarrow$ $X \neq \underline{0}$ ed $\exists \lambda$: $AX = \lambda X$

cioè $AX = \lambda I X$ ovvero

$$(A - \lambda I) X = \underline{0}$$

$\tilde{X}$ autovettore di A di autovalore λ $\Leftrightarrow$

$\tilde{X}$ soluzione non banale (autosoluzione) del sistema lineare omogeneo

$$(A - \lambda I) X = \underline{0} \quad (*)$$

ma (*) è omogeneo ⇒ è sempre risolubile
ma ammette autosoluzioni (cioè sol. non banali) ⇔ non è di Cramer ⇔ $rk(A-\lambda I)<n$ ⇔

$$\boxed{\det(A-\lambda I)=0}$$

Equazione caratteristica

→ Le radici dell'equazione caratteristica sono tutti (e soli) gli autovalori di A.

L'insieme degli autovalori di A è detto spettro di A.

$$\boxed{Spec(A) := \{\lambda_{\in \mathbb{K}} : \det(A-\lambda I)=0\}.}$$

gli autovalori sono i valori di λ tali che $(A-\lambda I)$ non è invertibile.

• come trovare gli autovettori: data $A \in \mathbb{K}^{n,n}$

1) calcolare $\mathrm{Spec}(A)$ mediante l'eq. caratteristica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

2) $\forall \bar{\lambda} \in \mathrm{Spec}(A)$ calcolare $V_{\bar\lambda} := \mathrm{Ker}(A - \bar\lambda I)$.

I vettori di $V_{\bar\lambda}$ diversi da $\underline{0}$ sono gli autovettori di autovalore $\bar\lambda$.

Lo spazio vettoriale $V_{\bar\lambda}$ è detto autospazio di autovalore $\bar\lambda$.

[N.B. $V_{\bar\lambda} \leq \mathbb{K}^n$ perché è un Ker]

3) $\forall \bar\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ chiamiamo molteplicità algebrica di $\bar\lambda$ m_a il numero di volte che esso è

radice dell'eq. caratteristica.

cioè i tale che $(\lambda-\bar{\lambda})^i \mid \det(A-\lambda I)$

$(\lambda-\bar{\lambda})^{i+1} \nmid \det(A-\lambda I)$.

ma

chiamiamo <u>molteplicità geometrica</u> di λ

il valore $m_g(\lambda) := \dim V_\lambda = n - \operatorname{rk}(A-\lambda I)$.

<u>Teorema</u>: Matrici simili hanno stesso rango, determinante, polinomio caratteristico, autovalori, molteplicità geometriche ed algebriche.

<u>DIM</u>: $B = P^{-1}AP \Rightarrow \det(B-\lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) =$

$= \det(P^{-1}(A-\lambda I)P) = \cancel{\det} P^{-1} \cdot \det(A-\lambda I) \cdot$

$\cancel{\det}(P) = \det(A-\lambda I)$.

$\forall \bar{\lambda} \in Spec(A)$: $\quad m_g(\bar{\lambda}) = n - rk(A - \bar{\lambda} I) =$

$$= n - rk(P^{-1}(A - \bar{\lambda} I)P) = \dots$$

$$= n - rk(B - \bar{\lambda} I).$$

Teorema: Una matrice A è diagonalizzabile se e solamente se $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k} = \mathbb{K}^n$ ove $\{\lambda_1 \dots \lambda_k\} = Spec(A)$.

Teorema: ~~[illegible]~~ La somma fra tutti gli autospazi di una fissata matrice A è diretta.

$$\bigoplus_{\bar{\lambda} \in Spec(A)} V_{\bar{\lambda}} \text{ è diretta.}$$

DIM: Siano λ, μ due autovalori di A; $\lambda \neq \mu$

$n=2$ ~~per indut~~ Supponiamo $\bar{x} \in V_\lambda \cap V_\mu \Rightarrow$

$$\Rightarrow A\bar{x} = \lambda \bar{x} = A\bar{x} = \mu \bar{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda - \mu)\bar{x} = \underline{0}$$

o $\lambda = \mu$ ↯ oppure $\bar{x} = \underline{0}$

$$\Rightarrow V_\lambda \cap V_\mu = \{\underline{0}\} \Rightarrow V_\lambda \oplus V_\mu .$$

procediamo per induzione su n = numero di sottospazi

$n=2$ ok

supponiamo valga il teorema per $n \Rightarrow$ mostriamo che vale per $n+1$.

Siano $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2} \dots V_{\lambda_n}$ autospazi per A.
e consideriamo un vettore

$$X \in V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_n}$$

in particolare $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ con

$$X_i \in V_{\lambda_i}$$

cioè con $AX_i = \lambda_i X_i$

Considero ora 2 vettori:

$$y = AX = A(X_1 + \dots + X_n) = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n$$

$$z = \lambda_1 X = \lambda_1 X_1 + \lambda_1 X_2 + \dots + \lambda_1 X_n$$

supponiamo che la somma non sia diretta

$\Rightarrow \exists$ anche $x_1' + x_2' + \dots + x_n' = x_1 + x_2 + \dots + x_n = x$

con $x_i' \in V_{\lambda_i}$

$\cancel{Ax}$ $y - z = A(x_1 + \dots + x_n) - \lambda_1(x_1 + \dots + x_n)$

$= A(x_1' + \dots x_n') - \lambda_1(x_1' \dots + x_n')$

$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) - (\lambda_1 x_1 + \lambda_1 x_2 + \dots + \lambda_n x_n)$

$+ (\lambda_n - \lambda_1) x_n =$

$= (\lambda_2 - \lambda_1) x_2 + (\lambda_3 - \lambda_1) x_3 + \dots + (\lambda_n - \lambda_1) x_n'$

$= (\lambda_2 - \lambda_1) x_2' + (\lambda_3 - \lambda_1) x_3' + \dots$

comb. lineari in $V_{\lambda_2} + V_{\lambda_3} + \dots + V_{\lambda_n}$

in particolare, per ipotesi induttiva questa è una somma diretta perché ci sono $(n-1)$ autospazi.

$\Rightarrow X_2 = X_2' \quad X_3 = X_3' \quad \dots \quad X_n = X_n'$.

visto che $(\lambda_i - \lambda_1) \neq 0$ se $i > 1$.

$$X = X_1' + X_2' + X_3' + \dots + X_n' = X_1' + X_2 + X_3 + \dots + X_n$$

$$= X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

e da questo $X_1' = X - (X_2 + \dots + X_n) =$

$$= X_1.$$

$\square$

poiché la somma di autospazi è diretta abbiamo che $\dim \bigoplus V_{\lambda_i} = \sum \dim V_{\lambda_i}$

In particolare $\mathbb{K}^n$ ammette una base di autovettori $\Leftrightarrow$ $\dim \bigoplus V_{\lambda_i} = \sum \dim V_{\lambda_i} = n$

cioè se la somma delle molteplicità geometriche degli ~~autovettori di~~ autovalori di A è uguale ad n.

$$\boxed{\sum_{\bar{\lambda} \in Spec(A)} m_g(\bar{\lambda}) = n}$$

In tale caso una base di autovettori per $\mathbb{K}^n$ si ottiene facendo l'unione ~~delle~~ di basi dei V_{λ_i} al variare di $\lambda_i \in Spec(A)$.

Teorema: Sia $\bar{\lambda} \in Spec(A)$.
Allora $1 \leq m_g(\bar{\lambda}) \leq m_a(\bar{\lambda})$.

N.B.: $\deg(\det(A - \lambda I)) = n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ & & \ddots & \\ \cdots & & & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

$\sum m_a(\bar{\lambda}) \leq n \leftarrow$

Def: Un autovalore $\bar{\lambda} \in Spec(A)$ è detto regolare se $m_a(\bar{\lambda}) = m_g(\bar{\lambda})$.

OSS: DATO IL TEOREMA A diagonalizzabile

$\iff \forall$ suo autovalore è regolare

e $\sum m_a(\lambda) = n$

(infatti questo $\Rightarrow \sum m_g(\lambda) = n$ $\square$).

DIM: $m_g(\bar{\lambda}) \leq m_a(\bar{\lambda})$

DIMOSTRIAMO CHE se $m_g(\bar{\lambda}) = i \Rightarrow m_a(\bar{\lambda}) \geq i$

Sia A matrice e supponiamo $V_{\bar{\lambda}} = \mathcal{L}(\bar{p}_1 \dots \bar{p}_i)$ con $(\bar{p}_1 \dots \bar{p}_i)$ base di $V_{\bar{\lambda}}$ completiamo a base di $\mathbb{K}^n$ i vettori colonna dati: $(\bar{p}_1 \dots \bar{p}_i\ \bar{w}_{i+1} \dots \bar{w}_n)$ e scriviamo come P la matrice che ha questi vettori come colonne.

$$AP = [\bar{\lambda}\bar{p}_1\ \bar{\lambda}\bar{p}_2 \dots \bar{\lambda}\bar{p}_i\ A\bar{w}_{i+1} \dots A\bar{w}_n] =$$

$$= \left[\bar{\lambda}\bar{p}_1\ \bar{\lambda}\bar{p}_2 \dots \bar{\lambda}\bar{p}_i \quad \right]$$

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \bar\lambda & 0 & 0 \\ & \bar\lambda & \\ 0 & \cdots & \bar\lambda \end{matrix} & \\ \hline \boxed{0} & \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} \lambda P^{-1}\bar{p}_2 & \lambda P^{-1}\bar{p}_3 & \cdots & \lambda P^{-1}\bar{p}_i & \\ \hline & & 0 & & \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \bar\lambda I_i & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$$

~~det(A-~~ $\det(P^{-1}AP - \lambda I) = (\bar\lambda - \lambda)^i \det(C - \lambda I)$

OSS. $(\bar{\lambda}-\lambda)^i$ divide il polinomio caratteristico di $P^{-1}AP$ ma questo è anche il polinomio caratteristico di A
$\Rightarrow \bar{\lambda}$ è radice dell'eq. caratteristica di A almeno i volte. $\Rightarrow m_a(\bar{\lambda}) \geq i$

<u>N.B</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)^4$$

$$m_a(\lambda) = 4$$

$$m_g(\lambda) = n - rk(A-\lambda I) =$$

$$= 4 - rk \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$