



**Algebra e Geometria**

Sesto Appello - 31/08/2023

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

**Quesiti**

- A) Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$ , sia  $U$  il sottospazio generato dalle soluzioni del sistema lineare  $x + y + z - 1 = y + z + t = 0$ . Si determini un sottospazio  $W$  tale che  $\dim W = 3$  e  $\dim(U \cap W) = 2$ .

---

---

- B) Nello spazio vettoriale  $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  si scrivano, se possibile, le coordinate del vettore  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  rispetto alla sequenza  $\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ .

---

---

- C) Sia  $C_k$  la conica di equazione  $kx_1^2 + x_2^2 + 2kx_1x_2 - 2x_2x_3 = 0$ .

(a) Si determini per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  la conica  $C_k$  è un'ellissi.

(b) Posto  $k = 1/2$ , si scriva l'equazione del fascio di rette il cui centro è il centro di  $C_k$ .

---

---

- D) In  $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ , si determini un'equazione cartesiana della retta per il punto  $P = (1, 1, 1)$  ortogonale al piano di equazione  $2x + 3y + 4z + 1 = 0$ .

---

---

- E) Si determini il complemento ortogonale del sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  dato da  $U = \{(x, y, z, t) : 2x - y - z = 0 = x - 3t\}$ .

---

---

- F) Si dica per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  il vettore  $(k, k, 1)$  è autovettore della matrice  $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Per ciascuno di tali valori, si determini l'autovalore corrispondente e la sua molteplicità geometrica.

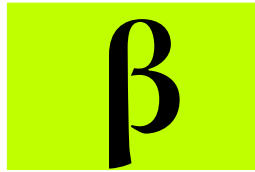
---

---

- G) Si trovino, se esistono, i valori di  $k \in \mathbb{R}$  tali che i tre piani  $x - z = 0$ ,  $2x + 2y + 2z = 1$  e  $(k + 2)x + 4y + kz = 1$  formino una stella impropria.

---

---



**Algebra e Geometria**

Sesto Appello - 31/08/2023

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

**Quesiti**

- A) Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$ , sia  $U$  il sottospazio generato dalle soluzioni del sistema lineare  $x - y + z - 1 = y - z + t = 0$ . Si determini un sottospazio  $W$  tale che  $\dim W = 2$  e  $\dim(U \cap W) = 1$ .

---

---

- B) Nello spazio vettoriale  $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  si scrivano, se possibile, le coordinate del vettore  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$  rispetto alla sequenza  $\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ .

---

---

- C) Sia  $C_k$  la conica di equazione  $2kx_1^2 + x_2^2 + 2kx_1x_2 - 2x_2x_3 = 0$ .

(a) Si determini per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  la conica  $C_k$  è un'iperbole.

(b) Posto  $k = 3$ , si scriva l'equazione del fascio di rette il cui centro è il centro di  $C_k$ .

---

---

- D) In  $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ , si determini un'equazione cartesiana della retta per il punto  $P = (1, 1, 1)$  ortogonale al piano di equazione  $x + 2y + 3z + 4 = 0$ .

---

---

- E) Si determini il complemento ortogonale del sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  dato da  $U = \{(x, y, z, t) : x + 2y - 4z = 0 = x - 2y - t\}$ .

---

---

- F) Si dica per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  il vettore  $(k, k + 1, 1)$  è autovettore della matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ . Per ciascuno di tali valori, si determini l'autovalore corrispondente e la sua molteplicità geometrica.

---

---

- G) Si trovino, se esistono, i valori di  $k \in \mathbb{R}$  tali che i tre piani  $-x + y + z = 1$ ,  $2y - 2z = 1$  e  $kx + (k + 2)y - 5z = 0$  formino una stella impropria.

---

---



**Algebra e Geometria**

Sesto Appello - 31/08/2023

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

**Quesiti**

- A) Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$ , sia  $U$  il sottospazio generato dalle soluzioni del sistema lineare  $x - y - z = y + z + t + 1 = 0$ . Si determini un sottospazio  $W$  tale che  $\dim W = 3$  e  $\dim(U \cap W) = 2$ .

---

---

- B) Nello spazio vettoriale  $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  si scrivano, se possibile, le coordinate del vettore  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  rispetto alla sequenza  $\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ .

---

---

- C) Sia  $C_k$  la conica di equazione  $kx_1^2 + x_2^2 + 2k^2x_1x_2 - 2x_2x_3 = 0$ .

(a) Si determini per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  la conica  $C_k$  è una parabola.

(b) Posto  $k = 1$ , si scriva l'equazione del fascio di rette il cui centro è il vertice di  $C_k$ .

---

---

- D) In  $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ , si determini un'equazione cartesiana della retta per il punto  $P = (1, 1, 1)$  ortogonale al piano di equazione  $4x + y + 2z + 3 = 0$ .

---

---

- E) Si determini il complemento ortogonale del sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  dato da  $U = \{(x, y, z, t) : 2x + z = x + 2t = 0\}$ .

---

---

- F) Si dica per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  il vettore  $(k + 1, k, 1)$  è autovettore della matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Per ciascuno di tali valori, si determini l'autovalore corrispondente e la sua molteplicità geometrica.

---

---

- G) Si trovino, se esistono, i valori di  $k \in \mathbb{R}$  tali che i tre piani  $x - z = 0$ ,  $2x + ky + (k + 2)z = 1$  e  $-x + 4y + 3z = 1$  formino una stella impropria.

---

---



**Algebra e Geometria**

Sesto Appello - 31/08/2023

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

**Quesiti**

A) Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$ , sia  $U$  il sottospazio generato dalle soluzioni del sistema lineare  $x + y + z = y + z + t = 0$ . Si determini un sottospazio  $W$  tale che  $\dim W = 2$  e  $\dim(U \cap W) = 1$ .

---

---

B) Nello spazio vettoriale  $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  si scrivano, se possibile, le coordinate del vettore  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$  rispetto alla sequenza  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ .

---

---

C) Sia  $C_k$  la conica di equazione  $kx_1^2 + x_2^2 + 2kx_1x_2 - 2x_2x_3 = 0$ .

(a) Si determini per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  la conica  $C_k$  è un'iperbole.

(b) Posto  $k = 2$ , si scriva l'equazione del fascio di rette il cui centro è il centro di  $C_k$ .

---

---

D) In  $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ , si determini un'equazione cartesiana della retta per il punto  $P = (1, 1, 1)$  ortogonale al piano di equazione  $3x + 4y + z + 2 = 0$ .

---

---

E) Si determini il complemento ortogonale del sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  dato da  $U = \{(x, y, z, t) : y + z + t = 3x + 2t = 0\}$ .

---

---

F) Si dica per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  il vettore  $(k, k, 2)$  è autovettore della matrice  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Per ciascuno di tali valori, si determini l'autovalore corrispondente e la sua molteplicità geometrica.

---

---

G) Si trovino, se esistono, i valori di  $k \in \mathbb{R}$  tali che i tre piani  $-x + y + z = 1$ ,  $ky - kz = 1$  e  $x + 3y - 5z = 1$  formino una stella impropria.

---

---