Classificazione delle quadriche.

Quadrica → superficie algebrica reale del II ordine in $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$

↓

matrice A reale e simmetrica.

↓

prodotti scalari che avranno una certa segnatura (elenco segni autovalori della matrice A)

N.B: Autovalori di $A = -$ autovalori di $-A$

perciò il numero di autovalori che sono 0, hanno segno $\pm$ e segno $\mp$ è lo stesso.

$(++++)$ $(----)$

L'insieme non ordinato

$\{\#\{aut.=0\}, \#\{aut>0\}, \#\{aut<0\}\}$.

non dipende dalla matrice che rappresenta la quadrica.

$EG(3,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{P}^3\mathbb{R} \subseteq \mathbb{P}^3\mathbb{C}$

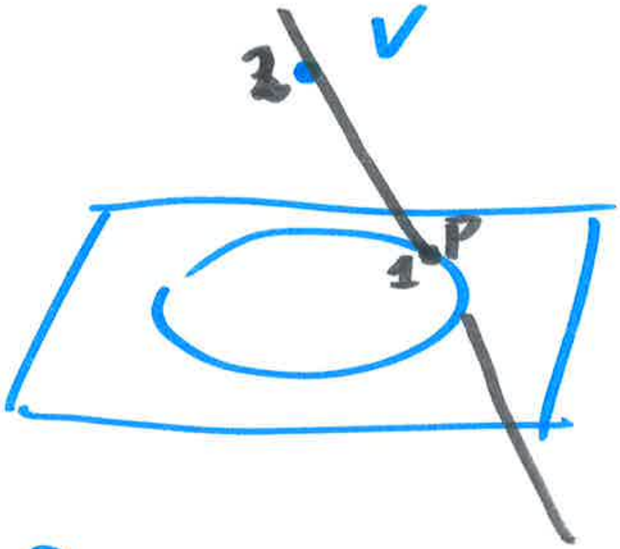
per classificare: prima si lavora in $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$
poi in $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$
infine in $AG(3,\mathbb{R})$

- in $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$ l'unica cosa che possiamo studiare è il rango della matrice. / autovalori $= 0$
autovalori $\neq 0$.

$(\neq, 0\,0\,0) \to rk(A) = 1$ ∞^2 p.ti doppi
$(\neq \neq 0\,0) \to rk(A) = 2$ ∞^1 p.ti doppi
RIDUCIBILE IN 2 PIANI!
$(\neq \neq \neq 0) \to rk(A) = 3$ 1 p.to doppio
$(\neq \neq \neq \neq) \to rk(A) = 4$ GENERALE
0 p.ti doppi

Quadrica con un unico punto doppio
→ CONO o CILINDRO.
→ luogo dei punti che stanno sulle rette che congiungono un p.to. fissato V con i

punti di una conica generale su di un piano non per V.



$2+1=3>2$ e quindi VP deve essere contenuta.

→ In $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$

$(\neq 0\,0\,0) \;—\; (+\,0\,0\,0),\ (-\,0\,0\,0)$

$x_1^2=0$

$(\neq\neq 0\,0) < \begin{cases} (+\,+\,0\,0)\ \ (-\,-\,0\,0) \\ (+\,-\,0\,0) \end{cases}$

$(+\,+\,0\,0)\ (-\,-\,0\,0) \rightarrow x_1^2+x_2^2=0 \rightarrow$ 2 piani immaginari e coniugati

$(+\,-\,0\,0) \rightarrow x_1^2-x_2^2=0 \rightarrow$ 2 piani reali e distinti

$(\neq\neq\neq 0) < \begin{cases} (+\,+\,+\,0)\ \ (-\,-\,-\,0) & [A] \\ (+\,+\,-\,0)\ \ (+\,-\,-\,0) & [B] \end{cases}$

[A] $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0 \rightarrow \exists!$ punto reale

$[(0001)]$

[B] ~~x_1~~ $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0 \rightarrow$ coni o cilindri a falda reale.

$(\neq\neq\neq\neq)$ QUADRICA GENERALE

↳ $(++++)$ $(----)$ (A')

$(+++-)$ $(---+)$ (B')

$(++--)$ (C').

A': $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0 \rightarrow$ NON $\exists$ punti reali.

B'/C': ci sono punti reali in Q.

Nel caso B' la quadrica non contiene rette reali

Nel caso C' la quadrica contiene rette reali.

nel caso B' la quadrica è detta

<u>ELLITTICA</u>

nel caso C' la quadrica è detta

<u>IPERBOLICA</u>.

B') $$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$$

retta generica per 2 punti della quadrica.

$$(*)\begin{cases} x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-x_4'^2=0 \\ x_1''^2 \quad \dots \quad =0 \end{cases}$$

$$\lambda P+\mu Q$$

$$(\lambda x_1'+\mu x_1'')^2+(\lambda x_2'+\mu x_2'')^2$$
$$+(\lambda x_3'+\mu x_3'')^2-(\lambda x_4'+\mu x_4'')^2=0$$

$$2\lambda\mu\underbrace{(x_1'x_1''+x_2'x_2''+x_3'x_3''-x_4'x_4'')}=0$$

Quando questo vale $\forall \lambda,\mu$?

$\Leftrightarrow x_1'x_1''+x_2'x_2''+x_3'x_3''-x_4'x_4''=0$

$\Leftrightarrow$ i punti P e Q sono coniugati $\Leftrightarrow$ P appartiene al piano tg. per Q.

$\pi: \; x_1\cdot x_1''+x_2\cdot x_2''+x_3\cdot x_3''-x_4\cdot x_4''=0$

intersecato $\alpha: x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$

~~Se $\pi\cap\alpha$ contiene rette reali~~

1) $\pi\cap\alpha$ è una conica irriducibile perché polare di $Q\cap\alpha$

2) Se contenesse rette reali $\Rightarrow$ dovrebbe avere punti all'infinito reali.

$x_3=0=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ ↯

$x^2+y^2+z^2=1$

NON CONTIENE RETTE REALI

c') $(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) = 0$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (x_3 - x_4)(x_3 + x_4) = 0$$

$P = [(1\ 1\ 0\ 0)]$

$Q = [(0\ 0\ 1\ 1)]$

osservo che ogni punto della retta PQ sta nella quadrica.

$[(\lambda\ \lambda\ \mu\ \mu)]$

$\rightarrow$ quadrica iperbolica: contiene rette.

CLASSIFICAZIONE AFFINE.

Si considerano le matrici A e A^* = minore 3x3 di Nord ovest di A (quadrica in $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ + intersezioni con $x_4 = 0$).

Quadriche generali

$(++++)$ $(----)$ A

NON CI SONO PTI. REALI

$(+++)$ $(---)$ A^*

N.B In generale ~~fra~~ gli autovalori di A e quelli di A^* possono essere diversi.

→ NON SI PUÒ A PRIORI METTERE A in forma diagonale perché bisogna fissare $x_4=0$.

- A^* $(+++)$ $(---)$ → non ci sono punti all'inf. reali

→ ELLISSOIDE.

[N.B $(+++)/(---)$ la quadrica deve essere ellittica].

- A^*: $(++-)$, $(+--)$ → la intersezione col piano improprio è una conica irrid. con punti reali

→ IPERBOLOIDE.

- A^*: $(++0)$, $(--0)$ → la quadrica si dice paraboloide e la sua conica impropria sono 2 rette imm. e coniugate

- A^*: $(+-0)$ → la quadrica si dice paraboloide e la sua conica impropria sono 2 rette reali e distinte.

Generali

$(++++)$ / $(+++)$ priva di pti reali

$(+++-)$ / $(+++)$ ellissoide. (ellittico)

$(+++-)$ / $(++-)$ iperboloide ellittico

$(+++-)$ / $(++0)$ paraboloide ellittico

$(++--)$ / $(++-)$ iperboloide iperbolico

$(++--)$ / $(+-0)$ paraboloide iperbolico

In generale il caso

$(+ + + -)$ $(+ - 0)$ NON É POSSIBILE

~~iperbolico~~

ellittico

come pure $(+ + - -)$ $(+ + 0)$