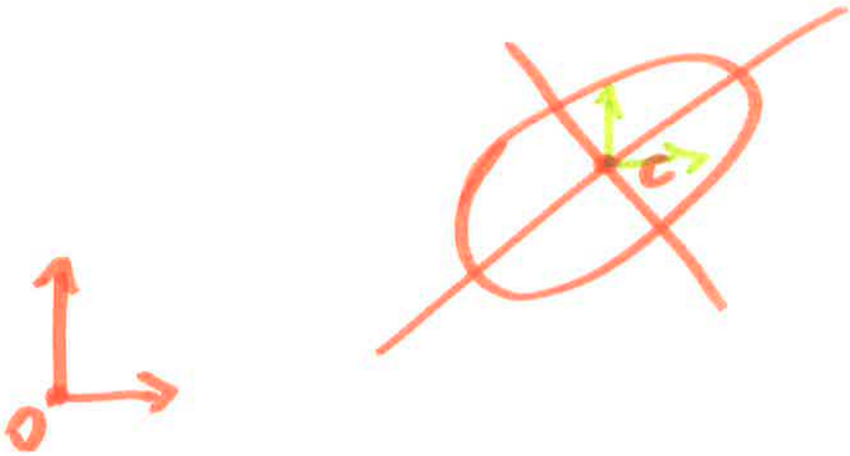


Conica in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ $\rightarrow$ matrice reale
e simmetrica

$\downarrow$

DIAGONALIZZABILE.

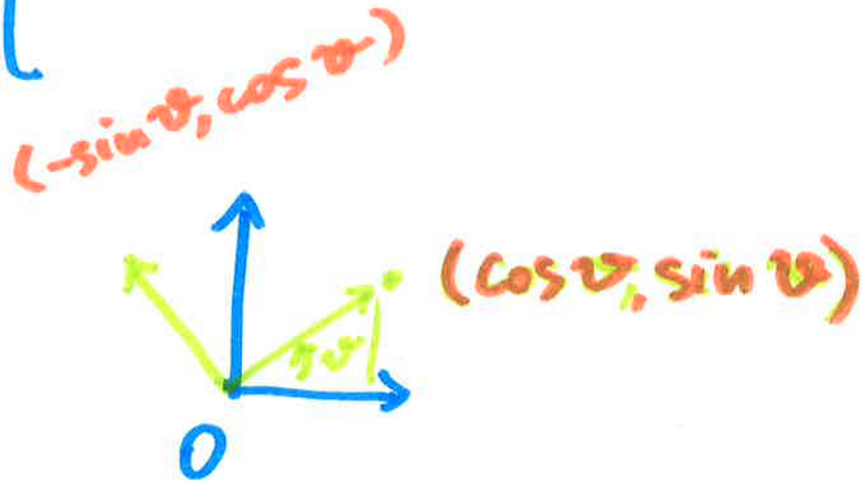
$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots = 0$$

$$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 = 0$$

nel caso affine si possono usare solo le trasf. ortogonali che mandano la retta $x_3=0$ in $x_3=0$.

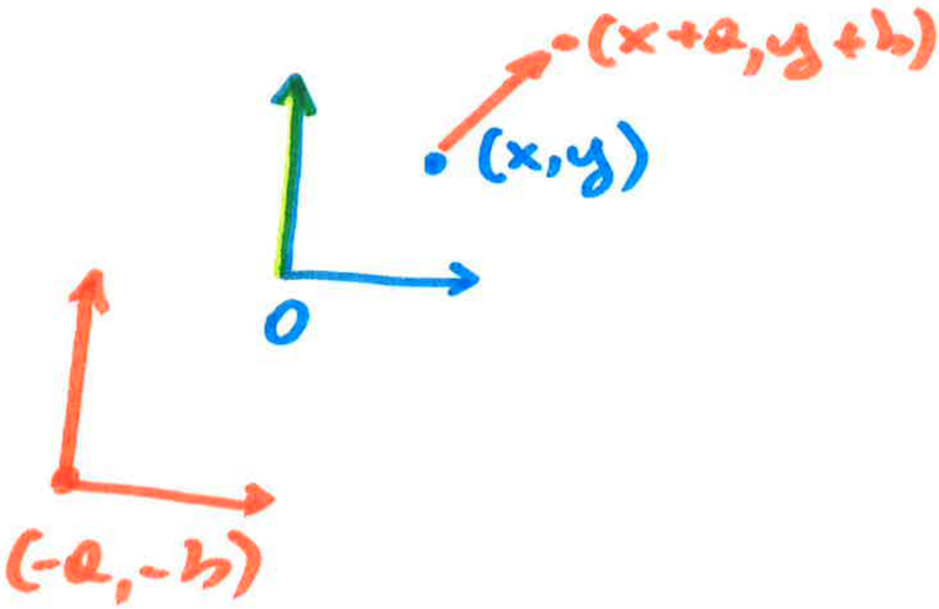
$$[(p,q,0)] \longrightarrow [(p',q',0)]$$

[s



$$(x,y) \to \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}$$

$$(x,y) \to (x+a,\ y+b)$$



$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_{31} p + b_{32} q = 0 \quad \forall p, q.$$

$$b_{31} = b_{32} = 0$$

$$\mathbb{P}^2\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{R}$$

trasformazione che manda la retta $x_3 = 0$ in se stessa.

→ manda i punti affini di $AG(2,\mathbb{R})$ in se stessi.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\rho_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \_\_$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b_{33} = 1$$

$$b_{11}x + b_{12}y + b_{13} = x + a \quad \forall x$$

$$b_{12} = 0 \quad b_{11} = 1 \quad b_{13} = a$$

$$b_{21}x + b_{22}y + b_{23} = y + b \quad \forall y$$

$$b_{21} = 0, \; b_{22} = 1, \; b_{23} = b.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \tau_{ab}$$

ρ_ϑ = rot. attorno origine

τ_{ab} = traslazione di vettore (a, b).

rotazione attorno al punto $(x, y) = P$

1) porto P nell'origine $\tau_{-x,-y}$

2) ruoto ρ_ϑ

3) riporto l'origine in P $\Rightarrow \tau_{x,y}$.

$$\tau_{x,y}\,\rho_\vartheta\,\tau_{-x,-y}$$

Fuochi di una conica.

1) calcola la polare dei punti ciclici
2) Determina le tg. alla conica
3) le interseca 2 a 2.

Fuochi Ellisse in Forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$J_\infty=[(1,i,0)]$$

$$\overline{J_\infty}=[(1,-i,0)]$$

eq. omogenea

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-x_3^2=0$$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{a^2} & & \\ & \frac{1}{b^2} & \\ & & -1\end{bmatrix}$$

retta polare di J_∞

$$p:(1\ i\ 0)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

$$\frac{1}{a^2}x_1+i\frac{1}{b^2}x_2=0$$

retta polare di $\overline{J_\infty}$

$$\overline{p}\to\frac{1}{a^2}x_1-i\frac{1}{b^2}x_2=0$$

punti di tangenza.

$$x_1=-i\frac{a^2}{b^2}x_2$$

$$\left(-\frac{a^4}{b^4}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)x_2^2=x_3^2\ /$$

$$\frac{b^2-a^2}{b^4}x_2^2=x_3^2$$

$$b>a\Rightarrow x_2=\pm\frac{b^2}{c}x_3$$

$$c=\sqrt{b^2-a^2}$$

punti tangenza rette per J_∞

$$\left[\left(-i\frac{a^2}{c}, \frac{b^2}{c}, 1\right)\right] = T_1$$

$$\left[\left(i\frac{a^2}{c}, -\frac{b^2}{c}, 1\right)\right] = T_2$$

i corrispondenti punti per $\overline{J_\infty}$ sono i coniugati

$\rightarrow$ rette tg per J_∞ $\rightarrow$ c. ang $= +i$

$$r_1: \left(y-\frac{b^2}{c}\right) = i\left(x+\frac{a^2}{c}i\right)$$

$$r_2: \left(y+\frac{b^2}{c}\right) = i\left(x-\frac{a^2}{c}i\right)$$

le corrispondenti rette per $\overline{J_\infty}$ sono $\overline{r_1}$ e $\overline{r_2}$. In ogni caso gli unici punti reali di r_i sono i punti di $r_i \cap \overline{r_i}$ $\rightarrow$ calcoliamo questi.

$r_1 \cap \overline{r}_1$:

$$r_1 : \left(y - \frac{b^2}{c}\right) = i\left(x + \frac{a^2}{c} i\right)$$

$$\overline{r}_1 : \left(y - \frac{b^2}{c}\right) = -i\left(x - \frac{a^2}{c} i\right)$$

$$2x + \frac{a^2}{c} i - \frac{a^2}{c} i = 0 \rightarrow x = 0$$

$$y = \frac{a^2}{c}(-1) + \frac{b^2}{c} = \frac{b^2 - a^2}{c} = c$$

Similmente per $r_2 \cap \overline{r}_2 \rightarrow$

$x = 0, \; y = -c.$

Cenni alle quadriche

noi si è lavorato per $n=2$

→ curve algebriche in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$

e poi coniche in $EG(2,\mathbb{R})$ o

$AG(2,\mathbb{R})$.

$n>2$ si parla in generale di

(iper)superfici algebriche in $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ come

luogo $\tilde{V}(F)=\{[x] \mid F(x)=0\}$.

ove $x \in \mathbb{K}^{n+1}$, F polinomio

omogeneo in $x_1 \dots x_{n+1}$ di grado k

fissato.

Valgono $\forall n \geq 2$ teoremi "dell'ordine":

→ Una retta di $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ interseca

sempre $\tilde{V}(F)$ in k punti

contati con la debita molteplicità

oppure $r_0 \subseteq \tilde{V}(F)$.

→ Un iperpiano Σ di $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ (= sottospazio descritto da 1 equazione omogenea di primo grado) interseca $\tilde{V}(F)$ in una ipersuperficie di Σ di grado k a meno che non sia $\Sigma \subseteq \tilde{V}(F)$.

$n=2$: rette ≡ iperpiani.

$n=3$ → rette ↗ in k punti

piani ↘ in curve di ordine k.

In particolare si dicono <u>quadriche</u> le ipersuperfici algebriche del II ordine in $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$.

Sia $F(x_1\, x_2\, x_3\, x_n) = 0$

l'equazione di una quadrica.

$F(x_1\, x_2\, x_3\, x_n)$ polinomio omogeneo

di II grado in $x_1\, x_2\, x_3\, x_n$.

→ esattamente come per $n=2$

possiamo associare ad F una

matrice simmetrica A

$$F(x_1 \dots x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij}x_i x_j$$

$$\downarrow$$

$A = ((a_{ij}))$. → e quindi c'è anche un prod. scalare associato alla quadrica.

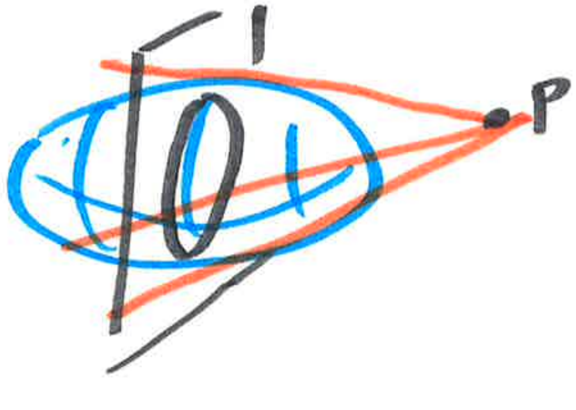
$$\beta(x,y) = \frac{1}{2}\left[F(x+y) - F(x) - F(y)\right]$$

valgono le proprietà delle polarità anche per $n=3$.

- In particolare ~~la~~ polare di un punto è un piano e il polo di un piano è un punto (se $\det A \neq 0$).

Il piano polare di $P \in \tilde{V}(F)$ è il piano tg. in P.

- Vale il principio di reciprocità.
- Se $P \notin \tilde{V}(F) \Rightarrow$ il piano polare di P rispetto $\tilde{V}(F)$ se $\det(A) \neq 0$ interseca $\tilde{V}(F)$ in una conica che corrisponde ~~alla~~ ai p.ti di intersezione delle tg. per P con $\tilde{V}(F)$



CLASSIFICAZIONE DELLE QUADRICHE.

→ CONICHE
- SINGOLARI → RIDUCIBILI
- GENERALI →
  - ellissi
  - iperboli
  - parabole.

studiate intersez. con $x_3 = 0$

QUADRICHE
- SINGOLARI
  - IRRIDUCIBILI
  - RIDUCIBILI
- GENERALI → CLASSIFICHIAMO STUDIANDO INTERSEZIONE CON $x_4 = 0$

ma ci sono altri dettagli.

Generali = prive di pti doppi.

Singolari ⇒ ∃ almeno 1 pto doppio.

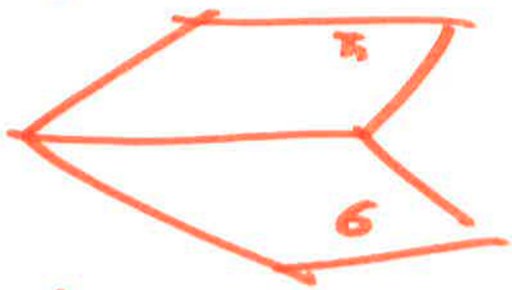
Come per $n=2$ si dimostra che i punti doppi di una quadrica sono tutti e soli quelli associati alle autosoluzioni di $AX=\underline{0}$

$rk(A)$	
1	∞^2 punti doppi (piano)
2	∞^1 punti doppi (retta).
3	1 punto doppio
4	0 punti doppi

<u>OSS</u>: Una quadrica in $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$ è riducibile $\iff$ ha almeno 2 punti doppi.

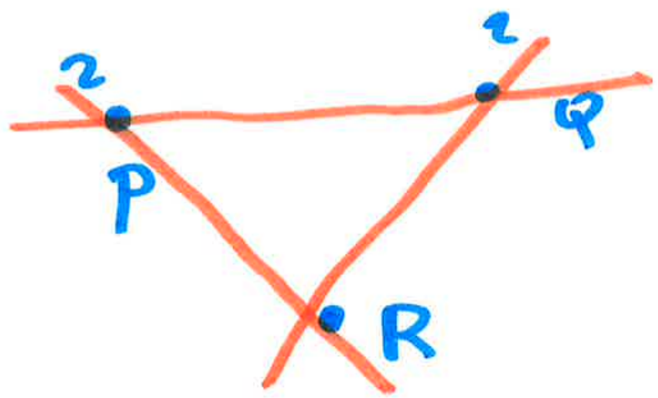
se Q riducibile $\Rightarrow Q = \pi \cup \sigma$ con π, σ piani.

prendiamo i punti di $\pi \cap \sigma$



questi sono almeno $\infty^1 > 2$ e noto rette doppi. Infatti se $P \in \pi \cap \sigma$ ed r è una retta per P che non è contenuta in $Q = \pi \cup \sigma \Rightarrow r$ interseca Q solo in $P \Rightarrow P$ è doppio perché r deve avere 2 intersezioni con Q.

Se ci sono 2 punti doppi, P, Q consideriamo R un punto di $\mathcal{Q} = \tilde{V}(F)$ che non è sulla retta P, Q.



Allora la retta PR interseca $\mathcal{Q}$ in ≥ 3 punti; la retta PQ interseca $\mathcal{Q}$ in ≥ 4 punti; la retta QR interseca in ≥ 3 punti.

$\Rightarrow$ il piano generato da P, Q, R interseca la Quadrica in almeno una curva di III ordine (il prodotto delle 3 rette) $\Rightarrow$ è contenuto $\Rightarrow$ la quadrica è riducibile $\square$

In generale $\forall n$: la quadrica è riducibile se $rk(A) = 2$.